

ANALISI PREVISIONALE NELL'INGEGNERIA OFFSHORE

FRANCESCO FEDELE

Dipartimento di Meccanica dei Fluidi e Ingegneria Offshore, Università di Reggio Calabria

INTRODUZIONE

Per progettare una struttura marittima è necessario individuare le dimensioni dell'onda di progetto. Gli approcci al calcolo dell'onda di progetto sono due. In particolare, fissata la vita di progetto L (funzione dell'importanza e funzionalità dell'opera) ed un livello di probabilità P (rischio di collasso o danneggiamento della struttura) si procede a:

- a) determinare la soglia di altezza significativa h che viene superata durante L con probabilità P . Si calcola la persistenza $D(h)$ cioè il tempo in cui mediamente l'altezza significativa si mantiene al disopra della soglia h . Si assume come stato di mare convenzionale di progetto quello con $H_s = h$ e durata pari a $2D(h)$. E' possibile a questo punto calcolare l'altezza massima attesa H_{\max} nello stato di mare di progetto e il periodo dell'onda di progetto;
- b) determinare la soglia di altezza H dell'onda più alta che durante la vita di progetto viene superata con probabilità P . L'onda è eccezionalmente alta per lo stato di mare in cui si è formata e pertanto essa avrà un periodo e un'altezza ben definiti.

Il metodo (a) viene utilizzato per la progettazione delle strutture costiere; il metodo (b) viene utilizzato per la progettazione delle strutture offshore.

In questo lavoro viene approfondito il metodo (b). Allo scopo vengono analizzate due tipologie di strutture offshore: un palo fisso ed un palo articolato. Fissata la vita di progetto L si determinano le dimensioni dell'onda più alta e si calcolano le soglie di sollecitazione e di spostamento che durante la vita di progetto vengono superate con probabilità P .

1. LE DIMENSIONI DELL'ONDA DI PROGETTO

Il crescente grado di razionalizzazione del progetto delle strutture marittime richiede un'accurata analisi previsionale delle dimensioni dell'onda più alta che si realizzerà durante la vita di progetto della struttura. L'onda più alta determina sulla struttura uno stato di sollecitazione che provoca la deformazione delle membrature costituenti la struttura stessa. Pertanto, in fase di progettazione, se si conoscono le dimensioni dell'onda più alta è possibile dimensionare la struttura in modo che sotto l'azione del campo di moto prodotto dall'onda più alta non rischi il collasso.

Per determinare le dimensioni dell'onda più alta viene utilizzata una soluzione analitica di Boccotti (1986a), basata sul concetto di 'mareggiata triangolare equivalente'. In sintesi, ad ogni mareggiata vera può essere associata una mareggiata triangolare (evoluzione nel

tempo dell'altezza significativa, di tipo triangolare) assolutamente equivalente alla mareggiata vera. [Per "assolutamente equivalente" si intende che mareggiata triangolare equivalente e mareggiata vera, oltre ad avere lo stesso valor massimo dell'altezza significativa, hanno la stessa probabilità che l'altezza della singola onda più alta superi una qualsiasi assegnata soglia.]

Utilizzando il concetto di mareggiata triangolare equivalente (m.t.e.) Boccotti (1986b) ha ricavato, la soluzione analitica per il periodo di ritorno di una mareggiata contenente almeno un'onda più alta di un'assegnata soglia H . Qui indicheremo tale periodo di ritorno con il simbolo $R_a(H)$. Inoltre, per semplicità, useremo le espressioni *base del triangolo* e *altezza del triangolo* anziché *durata della m.t.e.* e *valor massimo dell'altezza significativa della m.t.e.*.

La soluzione analitica di $R_a(H)$ è

[1.1]

$$R_a(H) = \left\{ \int_H^\infty \int_0^\infty \frac{1}{T(h)} p(x; H_s = h) \int_h^\infty \frac{dp(H_s = a)}{da} \cdot \exp \left[\frac{\bar{b}(a)}{a} \int_0^a \frac{1}{T(z)} \ln[1 - P(x; H_s = z)] dz \right] da dh dx \right\}^{-1};$$

dove $p(H_s = a)$ è la densità di probabilità dell'altezza significativa nella località in esame; $\bar{b}(a)$ è il valor medio delle basi nei triangoli di altezza assegnata a ; $T(h)$, $p(x; H_s = h)$ e $P(x; H_s = h)$ rappresentano rispettivamente, in uno stato di mare di altezza significativa $H_s = h$, il periodo medio delle onde, la densità di probabilità delle altezze delle onde e la probabilità di superamento delle altezze delle onde. Le espressioni di tali funzioni vengono riportate nell'Appendice A per comodità di consultazione.

Assumendo che il processo puntuale delle realizzazioni delle mareggiate di periodo di ritorno $R_a(H)$ sia poissoniano, la probabilità P che durante la vita L di progetto si realizzi almeno una mareggiata contenente almeno un'onda più alta di un'assegnata soglia H risulta:

$$[1.2] \quad P[H_{\max}(L) > H] = 1 - e^{-\frac{L}{R_a(H)}}.$$

ovvero sostituendo l'espressione [1.1] si ottiene

[1.3]

$$P[H_{\max}(L) > H] = 1 - \exp \left\{ -L \int_H^\infty \int_0^\infty \frac{1}{T(h)} p(x; H_s = h) \int_h^\infty \frac{dp(H_s = a)}{da} \exp \left[\frac{\bar{b}(a)}{a} \int_0^a \frac{1}{T(z)} \ln[1 - P(x; H_s = z)] dz \right] da dh dx \right\}$$

Tale probabilità coincide con la probabilità che l'onda massima nella vita L di progetto superi un'assegnata soglia H . Pertanto ai fini della progettazione di una struttura offshore, fissata la vita di progetto L si costruisce il diagramma $P[H_{\max}(L) > H]$ (vedi fig. 1) e si entra in ordinate con il valore della probabilità di accadimento P ; si segue il flusso indicato in figura e si ricava il corrispondente valore di altezza d'onda H . Il valore ottenuto ha una probabilità P di essere superato dall'onda massima durante la vita di progetto L . L'onda massima sarà un'onda molto alta per località in esame ma anche molto alta rispetto allo

stato di mare in cui si realizzerà. Infatti Boccotti (1986) ha dimostrato che l'altezza significativa dello stato di mare in cui si realizza l'onda massima con altissima probabilità è pari a $H_s \approx H_{\max} / 2$. Inoltre poiché l'onda è eccezionalmente alta per il suo stato di mare è possibile applicare ad essa la teoria di quasi-determinismo prevedendo che essa avrà un ben preciso periodo. Se lo spettro è JONSWAP medio l'onda molto alta ha un periodo pari a

$$[1.4] \quad T_h = 0.92 T_p .$$

$T_p = 8.5 \pi \sqrt{\frac{H_s}{4g}}$ è il periodo dominante delle onde.

Concludendo fissato un livello di probabilità di superamento P , è possibile determinare le dimensioni dell'onda massima che si realizzerà durante la vita di progetto L di una struttura offshore. Note le dimensioni dell'onda massima (cioè l'altezza d'onda H che viene superata con probabilità P durante la vita di progetto L e il periodo T_h) è possibile calcolare le azioni idrodinamiche e le deformazioni cui la struttura offshore va incontro durante la sua vita di progetto.

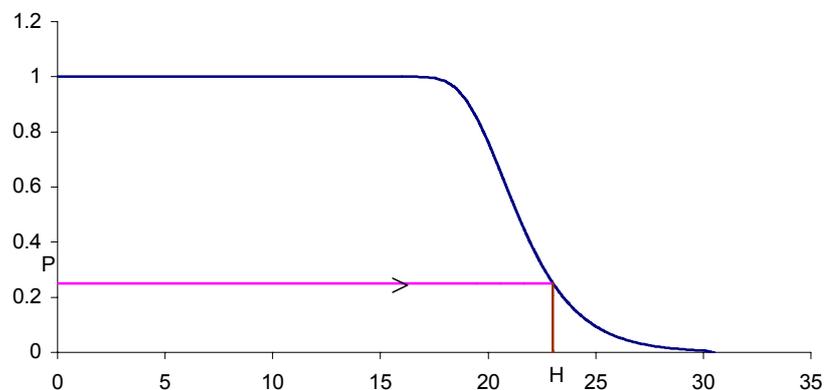


Figura 1. Probabilità $P[H_{\max}(L) > H]$ che l'onda massima in L anni superi una qualsiasi soglia H . Si entra in ordinate con il valore P si segue il flusso indicato in figura e si ricava con il corrispondente valore di altezza H .

2 L'INTERAZIONE ONDE REGOLARI – STRUTTURE OFFSHORE

Si considerino due strutture offshore semplici: un palo fisso ed un palo articolato. Entrambe le strutture siano soggette all'azione di onde regolari. Note le caratteristiche dell'onda (altezza e periodo) si vuole studiare lo stato di sollecitazione e deformazione al quale va incontro la struttura.

Per il caso del palo fisso si determina la storia temporale della forza risultante e del momento risultante. Nel caso del palo articolato si studia la risposta armonica del sistema (in termini di spostamento).

2.1 LE SOLLECITAZIONI PRODOTTE SU UN PALO FISSO

Si consideri un palo fisso come in fig.2. Il campo di moto intorno al cilindro snello non può ritenersi ideale come nel caso di un cilindro di grandi dimensioni. Va ricordato infatti che nel campo dei cilindri di piccole dimensioni le ipotesi di fluido ideale non sono più verificate. Nella zona protetta del contorno del cilindro si innesca la formazione di vortici dovuti al distacco dello strato limite aderente al contorno. La caduta di pressione dovuta ai vortici (l'energia di pressione si trasforma in energia cinetica che alimenta i vortici) provoca la formazione di una ulteriore forza, denominata forza di drag che dipende dalla velocità del fluido. Il moto non è più irrotazionale nelle vicinanze del cilindro e gli effetti della viscosità non sono più trascurabili.

La forza per unità di lunghezza che agisce sul palo per effetto del moto ondoso può essere valutata facendo riferimento al campo di moto ideale intorno al cilindro d'acqua equivalente mediante la formula di Morison (Chakrabarti 1987 e Sarpkaya and Isaacson 1981)

$$[2.1] \quad \vec{f}(t) = C_m \rho \pi a^2 \vec{a}(t) + C_d \rho a |\vec{v}(t)| \vec{v}(t)$$

in cui \vec{a}, \vec{v} sono le proiezioni rispettivamente del vettore accelerazione e del vettore velocità nel piano della sezione del cilindro d'acqua equivalente (si intendono i valori nel centro della predetta sezione). La formula precedente semplifica notevolmente il calcolo delle azioni idrodinamiche perché fa riferimento al moto ideale in campo libero da ostacoli e prescinde dalla conoscenza del reale campo di moto intorno al cilindro solido.

La formula di Morison è dunque somma di due termini: il primo rappresenta la forza inerziale ovvero la forza che agisce sul cilindro d'acqua equivalente moltiplicata per un coefficiente d'inerzia C_m ; il secondo rappresenta la cosiddetta forza di drag e il fattore moltiplicativo C_d è il coefficiente di drag. Se il palo è di grandi dimensioni il secondo termine è trascurabile rispetto alla forza d'inerzia: il campo di moto intorno al cilindro è essenzialmente ideale.

Nel corso dell'esperimento RC 1993 (Boccotti 1996) si è osservato che il moto di un fluido nell'intorno di un corpo immerso può ritenersi ideale se il numero di Keulegan-Carpenter $K_E < 5$, dove

$$[2.2] \quad K_E = \frac{V_{MAX} T}{D}$$

in cui V_{MAX} è la velocità massima della particella di fluido che occupa la posizione del baricentro del cilindro d'acqua equivalente di diametro D ; T è il periodo dell'onda. Pertanto la formula di Morison copre il campo dei cilindri con $K_E > 5$. Il campo di moto ideale ovvero il campo di moto di un fluido irrotazionale libero da ostacoli è un moto a potenziale che soddisfa il sistema di equazioni differenziali al primo ordine di Stokes (Boccotti 1997)

$$[2.3] \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \\ p + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho g z = F(t) \\ \rho g \eta + \rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{z=0} = F(t) \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ V_z \Big|_{z=-d} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=-d} = 0 \end{array} \right.$$

La prima equazione è quella di continuità della massa, la seconda esprime la conservazione dell'energia, la terza impone che la pressione sulla superficie libera sia quella atmosferica. La quarta condizione impone l'esistenza della superficie libera cioè la superficie di separazione tra fluido ed aria mentre l'ultima esprime l'impossibilità che una particella di fluido compenetri il fondo oppure crei una zona di vuoto, condizioni di moto assurde dal punto di vista fisico.

Φ è il potenziale di velocità, η è l'elevazione d'onda mentre p è il campo di pressione instaurato dal moto ondoso.

La soluzione analitica del sistema [2.3] è stata fornita da Stokes e ha espressione

$$[2.4] \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(x, y, z, t) = g \frac{H}{2\omega} \frac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh(kd)} \sin[kx \sin(\theta) + ky \cos(\theta) - \omega t] + \frac{1}{\rho} \int_0^t F(\xi) d\xi \\ \eta(x, y, t) = \frac{H}{2} \cos[kx \sin(\theta) + ky \cos(\theta) - \omega t] \\ p(x, y, z, t) = -\rho g z + \left\{ \rho g \frac{H}{2} \frac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh(kd)} \cos[kx \sin(\theta) + ky \cos(\theta) - \omega t] \right\} \\ k \operatorname{tgh}(kd) = \frac{\omega^2}{g} \end{array} \right.$$

con θ la direzione d'attacco delle onde rispetto all'asse y . Il campo di velocità si ottiene mediante le

$$[2.5] \quad \begin{cases} v_x(x, y, z, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = g \frac{Hk \cosh[k(z+d)] \operatorname{sen}(\theta)}{2\omega \cosh(kd)} \cos[kx \operatorname{sen}(\theta) + ky \cos(\theta) - \omega t] \\ v_y(x, y, z, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = g \frac{Hk \cosh[k(z+d)] \cos(\theta)}{2\omega \cosh(kd)} \cos[kx \operatorname{sen}(\theta) + ky \cos(\theta) - \omega t] \\ v_z(x, y, z, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = g \frac{Hk \operatorname{senh}[k(z+d)]}{2\omega \cosh(kd)} \operatorname{sen}[kx \operatorname{sen}(\theta) + ky \cos(\theta) - \omega t] \end{cases}$$

mentre il campo delle accelerazioni vale

$$[2.6] \quad \begin{cases} a_x(x, z, t) = \frac{\partial v_x}{\partial t} = g \frac{Hk \cosh[k(z+d)] \operatorname{sen}(\theta)}{2 \cosh(kd)} \operatorname{sen}[kx \operatorname{sen}(\theta) + ky \cos(\theta) - \omega t] \\ a_y(x, z, t) = \frac{\partial v_y}{\partial t} = g \frac{Hk \cosh[k(z+d)] \cos(\theta)}{2 \cosh(kd)} \operatorname{sen}[kx \operatorname{sen}(\theta) + ky \cos(\theta) - \omega t] \\ a_z(x, y, z, t) = \frac{\partial v_z}{\partial t} = -g \frac{Hk \operatorname{senh}[k(z+d)]}{2 \cosh(kd)} \cos[kx \operatorname{sen}(\theta) + ky \cos(\theta) - \omega t] \end{cases}$$

I coefficienti C_m e C_d dipendono dal numero di Keulegan-Carpenter e dal numero di Reynolds e tale dipendenza è illustrata negli abachi di Sarpkaya e Isaacson (1981). Poiché sia R_E che K_E dipendono dalla velocità possiamo concludere che sia C_m che C_d sono funzione della profondità z . In particolare per $R_E / K_E = \frac{4a^2}{vT} > 10^4 \Rightarrow C_m = 1.85, C_d = 0.62$.

Vista la simmetria senza perdere di generalità si assume come direzione di propagazione delle onde quella coincidente con l'asse x . Pertanto la forza agente nella direzione x per effetto del moto ondoso vale (la componente di forza lungo y è nulla)

$$[2.7] \quad f_x(z, t) = -C_m(z) \rho g \pi a^2 \frac{Hk \cosh[k(z+d)]}{2 \cosh(kd)} \operatorname{sen}(\omega t) + \rho a C_d(z) \left[\frac{Hk \cosh[k(z+d)]}{2\omega \cosh(kd)} \right]^2 |\cos(\omega t)| \cos(\omega t)$$

con $\rho = 1030 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua. La forza totale agente sul palo vale

$$[2.8] \quad F_x(t) = \int_{-d}^0 f_x(z, t) dz = -F_m \operatorname{sen}(\omega t) + F_d |\cos(\omega t)| \cos(\omega t)$$

con

$$[2.9] \quad \begin{cases} F_{in} = \rho g \pi a^2 \frac{Hk}{2 \cosh(kd)} \int_{-d}^0 C_m(z) \cosh[k(z+d)] dz \\ F_d = \rho a \left[\frac{Hk}{2\omega \cosh(kd)} \right]^2 \int_{-d}^0 C_d(z) \cosh^2[k(z+d)] dz \end{cases}$$

mentre il momento totale alla base del cilindro vale

$$[2.10] \quad M(t) = \int_{-d}^0 (z+d) f_x(z,t) dz = -M_{in} \mathbf{sen}(\omega t) + M_d |\mathbf{cos}(\omega t)| \mathbf{cos}(\omega t)$$

con

$$[2.11] \quad \begin{cases} M_{in} = \rho g \pi a^2 \frac{Hk}{2 \cosh(kd)} \int_{-d}^0 C_m(z) \cosh[k(z+d)] (z+d) dz \\ M_d = \rho a \left[\frac{Hk}{2\omega \cosh(kd)} \right]^2 \int_{-d}^0 C_d(z) \cosh^2[k(z+d)] (z+d) dz \end{cases}$$

I valori massimi nel tempo della forza e del momento totale sono (vedi appendice B):

$$[2.12a] \quad F_{max} = \begin{cases} F_{in} & se \quad \frac{F_{in}}{2F_d} \geq 1 \\ \frac{F_{in}^2}{4F_d^2} + F_d & se \quad \frac{F_{in}}{2F_d} < 1 \end{cases}$$

$$[2.12b] \quad M_{max} = \begin{cases} M_{in} & se \quad \frac{M_{in}}{2M_d} \geq 1 \\ \frac{M_{in}^2}{4M_d^2} + M_d & se \quad \frac{M_{in}}{2M_d} < 1 \end{cases}$$

Applicazione

Come applicazione dei risultati precedenti si consideri un palo snello di dimensioni $a = 2m$ su una profondità $d = 125m$, soggetto all'azione di un'onda periodica avente

altezza $H = 30\text{ m}$ e periodo $T = 16.5\text{ s}$. Il valore massimo del numero di Keulegan-Carpenter si realizza alla sommità del palo e vale $K_E = 20 > 5$ mentre il rapporto R_E/K_E è prossimo a 10^6 . Pertanto possiamo assumere $C_m = 1.85$, $C_d = 0.62$.

Il massimo di forza nel tempo vale $F_{\max} = 344.3\text{ t}$ mentre il momento massimo risulta $M_{\max} = 26570\text{ tm}$.

Nella figura 3 è riportato l'andamento nel tempo della forza totale, mentre nella figura successiva l'andamento nel tempo della forza d'inerzia e di drag. Si noti come la componente di drag non è trascurabile rispetto a quella d'inerzia.

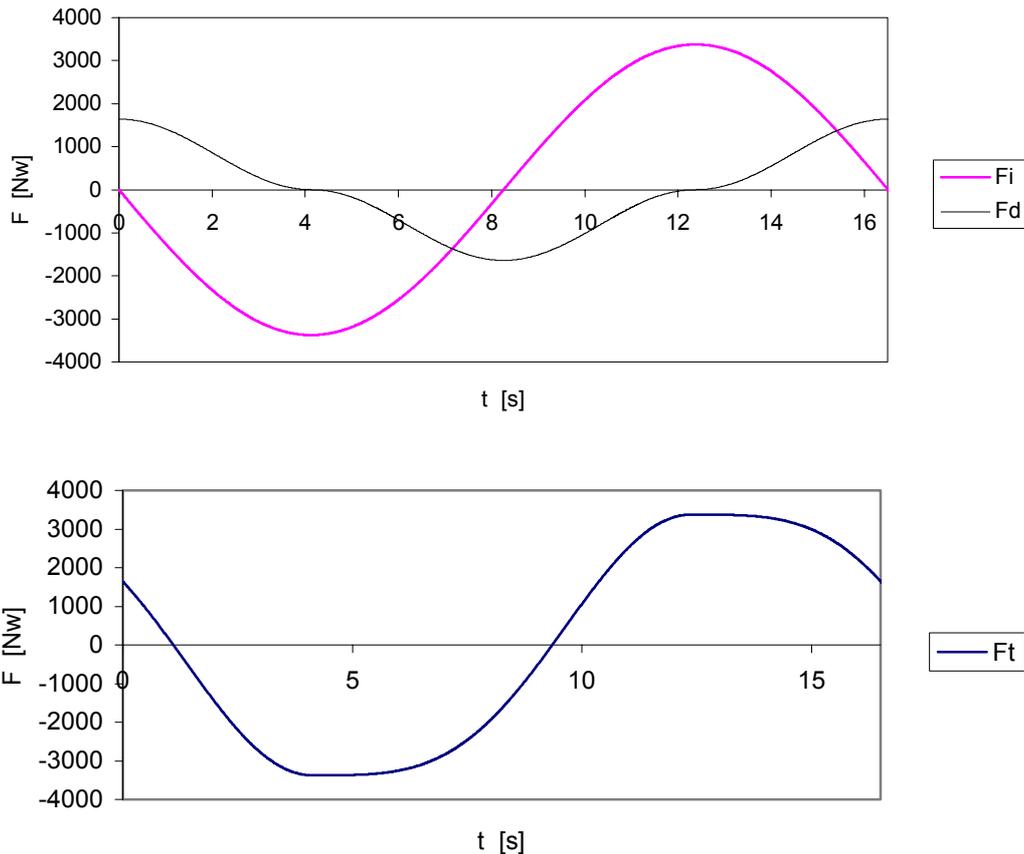


Figura 3 Andamento nel tempo delle componenti di forza inerziale e di drag e della forza totale per $d=125\text{ m}$, $a=2\text{ m}$, $H=30\text{ m}$ e $T=16.5\text{ s}$.

2.2 ANALISI DINAMICA DI UN PALO ARTICOLATO

Si consideri un palo di massa $m = \rho_s \pi a^2 d$, articolato alla base mediante una cerniera sferica di rigidità rotazionale concentrata K . Sia soggetto all'azione di onde periodiche (vedi fig. 4). Si ipotizzi che gli spostamenti della struttura siano piccoli (rispetto alla lunghezza d'onda L e alla lunghezza del palo) cioè

$$[2.13] \quad s/L \rightarrow 0, \quad s/d \rightarrow 0.$$

Inoltre il palo non deve essere molto snello altrimenti le deformazioni flessionali non sono più trascurabili rispetto agli spostamenti rigidi. Le sollecitazioni che le onde esercitano sul palo con la loro azione dipendono dal moto della struttura stessa. Si consideri un sistema

di riferimento solidale al cilindro solido; in questo riferimento il palo è fisso e pertanto la forza agente si può valutare con la formula di Morison :

$$[2.14] \quad \vec{f}(z,t) = C_m \rho \pi a^2 \vec{a}_r(z,t) + C_d \rho a |\vec{v}_r(z,t)| \vec{v}_r(z,t) + f_w(z,t)$$

in cui \vec{a}_r e \vec{v}_r sono questa volta,rispettivamente l'accelerazione e la velocità della particella di fluido che occupa la posizione del baricentro della sezione del cilindro d'acqua equivalente valutate rispetto al riferimento solidale al cilindro; $f_w(z,t)$ è la forza di trascinamento

$$f_w(z,t) = m \vec{a}_t(z,t) = \rho \pi a^2 \frac{d\vec{v}_t}{dt}$$

con \vec{v}_t la velocità assoluta con cui si muove il palo. Sia $s(z,t)$ lo spostamento che subisce il palo alla profondità z al variare del tempo. Risulta

$$[2.15] \quad \vec{v}_t(z,t) = \frac{\partial s(z,t)}{\partial t} [\cos(\alpha) \hat{x} - \sin(\alpha) \hat{z}]$$

con \hat{x} e \hat{z} i versori dei rispettivi assi. Poiché $s(z,t) = \alpha(t)(z+d)$ Se valgono le [2.13], allora $\cos(\alpha) \cong 1$ e $\sin(\alpha) \cong 0$ e la relazione precedente si semplifica nella

$$[2.16] \quad \vec{v}_t(z,t) \cong \frac{\partial s(z,t)}{\partial t} \hat{x}$$

La particella di fluido che occupa la posizione del baricentro del cilindro d'acqua equivalente in movimento avrà una velocità pari a

$$[2.17] \quad \vec{v}(z,t) = v(z,t) [\cos(\alpha) \hat{x} - \sin(\alpha) \hat{z}] = \frac{v_x(z,t)}{\cos(\alpha)} [\cos(\alpha) \hat{x} - \sin(\alpha) \hat{z}] \cong v_x(z,t) \hat{x}$$

Pertanto la velocità relativa della medesima particella, cioè la velocità rispetto al sistema solidale al cilindro d'acqua equivalente vale

$$[2.18] \quad \vec{v}_r(z,t) = \vec{v}(z,t) - \vec{v}_t(z,t) = \left[v_x(z,t) - \frac{\partial s}{\partial t} \right] \hat{x}$$

Derivando la [2.18] si ottiene l'accelerazione relativa

$$[2.19] \quad \vec{a}_r(z,t) = \frac{\partial \vec{v}_r}{\partial t} = \left[a_x(z,t) - \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \right] \hat{x}$$

Sostituendo le [2.16] , [2.18] e [2.19] nella [2.14] si ottiene l'espressione finale della forza agente sul cilindro in funzione dello spostamento s

$$[2.20] \quad \vec{f}(z,t) = f_x(z,t) \hat{x}$$

dove

[2.21]

$$f_x(z,t) = C_m \rho \pi a^2 \left[a_x(z,t) - \frac{\partial^2 s(z,t)}{\partial t^2} \right] + C_d \rho a \left| v_x(z,t) - \frac{\partial s(z,t)}{\partial t} \right| \left[v_x(z,t) - \frac{\partial s(z,t)}{\partial t} \right] + \rho \pi a^2 \frac{\partial^2 s(z,t)}{\partial t^2}$$

Se si ipotizza che il moto sia lentamente variabile nel tempo (v. Chakrabarti 1986) allora

$\frac{\partial s}{\partial t} \rightarrow 0$ ed è quindi valido lo sviluppo in serie di Taylor

$$[2.22] \quad \left| v_x(z,t) - \frac{\partial s}{\partial t} \right| \left[v_x(z,t) - \frac{\partial s}{\partial t} \right] \cong 2 |v_x(z,t)| \left[v_x(z,t) - \frac{\partial s}{\partial t} \right] \quad \text{per } \left| \frac{\partial s}{\partial t} \right| \ll 1$$

(infatti $|x + \Delta x|(x + \Delta x) \cong 2|x|(x + \Delta x)$ per $\Delta x \ll 1$)

Sostituendo la [2.22] nella [2.21] si ottiene

$$[2.23] \quad f_x(z,t) = f_0(z,t) + f_m(z,t) + f_d(z,t)$$

con

$$[2.24] \quad \begin{cases} f_0(z,t) = C_m \rho \pi a^2 a_x(z,t) + C_d \rho a |v_x(z,t)| v_x(z,t) \\ f_m(z,t) = -(C_m - 1) \rho \pi a^2 \frac{\partial^2 s(z,t)}{\partial t^2} \\ f_d(z,t) = -C_d \rho a |v_x(z,t)| \frac{\partial s(z,t)}{\partial t} \end{cases}$$

Pertanto in condizioni dinamiche l'azione delle onde sul palo si manifesta con due tipi di forze

- componente $f_0(z,t)$: tale forzante è indipendente dagli spostamenti che subisce il palo e rappresenta le forze d'inerzia e di drag che insorgono per effetto dell'azione delle onde periodiche agenti sul palo considerato fisso.
- componenti $f_m(z,t)$ e $f_d(z,t)$: dipendono dagli spostamenti che subisce il palo; in particolare la componente $f_m(z,t)$ ha carattere inerziale perché è proporzionale all'accelerazione del palo e viene denominata *forza di massa aggiunta*, mentre la componente $f_d(z,t)$ ha carattere dissipativo perché è proporzionale alla velocità del palo e tende a smorzarne il moto. Queste componenti di forza, sono le forze che insorgono quando si considera il cilindro libero di oscillare in acqua calma: oscillando il cilindro, altera lo stato di quiete del fluido intorno, provocando la formazione di un' *onda di radiazione* che altera il campo idrostatico delle pressioni intorno al cilindro stesso. Tale alterazione ha come effetto l'insorgere delle componenti di forza $f_m(z,t)$ e $f_d(z,t)$.

Poiché $s(z,t) = \alpha(t)(z+d)$ l'espressione della forza complessiva agente sul palo vale

$$[2.25] \quad f_x(z,t) = f_0(z,t) - (C_m - 1) \rho \pi a^2 (z+d) \frac{d^2 \alpha}{dt^2} - C_d \rho a |v_x(z,t)| (z+d) \frac{d \alpha}{dt}$$

con

$$[2.26] \quad f_0(z,t) = -C_m(z) \rho g \pi a^2 \frac{Hk \cosh[k(z+d)]}{2 \cosh(kd)} \sin(\alpha) + \rho \alpha C_d(z) \left[\frac{Hk \cosh[k(z+d)]}{2\omega \cosh(kd)} \right]^2 |\cos(\alpha)| \cos(\alpha)$$

e

$$[2.27] \quad v_x(z,t) = \frac{Hk \cosh[k(z+d)]}{2\omega \cosh(kd)} \cos(\omega t)$$

Il momento totale alla base del palo vale

$$[2.28] \quad M(t) = M_0(t) - \int_{-d}^0 \rho \pi a^2 (z+d)^2 dz \frac{d^2 \alpha}{dt^2} - \int_{-d}^0 \rho a C_d (z+d)^2 |v_x(z,t)| dz \frac{d\alpha}{dt}$$

con

$$[2.29] \quad M_0(t) = \int_{-d}^0 (z+d) f_0(z,t) dz$$

Imponiamo l'equilibrio dei momenti rispetto alla base del palo di tutte le forze agenti

$$- \int_{-d}^0 \rho_s \pi a^2 (z+d)^2 dz \frac{d^2 \alpha}{dt^2} - K\alpha + M_0(t) - \int_{-d}^0 \rho \pi a^2 (z+d)^2 dz \frac{d^2 \alpha}{dt^2} - \int_{-d}^0 \rho a C_d (z+d)^2 |v_x(z,t)| dz \frac{d\alpha}{dt} = 0$$

ovvero semplificando

$$[2.30] \quad (I + I_{add}) \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + C \cos(\omega t) \frac{d\alpha}{dt} + K\alpha = M_0(t)$$

e ricordando che lo spostamento massimo in sommità vale $s_{\max} = \alpha d$, segue che

$$[2.31] \quad (I + I_{add}) \frac{d^2 s_{\max}}{dt^2} + C \cos(\omega t) \frac{ds_{\max}}{dt} + K s_{\max} = d M_0(t)$$

$$\text{con } I = \frac{\rho_s \pi a^2 d^3}{3} \quad I_{add} = (C_m - 1) \frac{\rho \pi a^2 d^3}{3} \quad C = \frac{\rho a H k}{2\omega} C_d \left\{ \tanh(kd) \left[2 + (kd)^2 \right] - 2(kd) \right\}$$

L'equazione differenziale [2.31] è del secondo ordine a coefficienti variabili e la sua soluzione in forma chiusa è complicata. Poiché si è interessati ad avere una visione qualitativa del fenomeno fisico è sufficiente una soluzione approssimata della [2.31]; quindi, tenuto conto che $M_0(t)$ è una funzione periodica di periodo T , essa può essere approssimata nella forma

$$M_0(t) \approx M_{\max} \text{sen}(\omega t + \delta)$$

(l'approssimazione è tanto migliore quanto più il cilindro ha grandi dimensioni) e trascurando il coefficiente di smorzamento C la [2.31] si semplifica in un'equazione differenziale sempre del secondo ordine, però con coefficienti costanti

$$[2.32] \quad (I + I_{add}) \frac{d^2 s_{\max}}{dt^2} + K s_{\max} = d M_{\max} \text{sen}(\omega t + \delta)$$

che è l'equazione classica dell'oscillatore armonico in assenza di smorzamento soggetto ad una forzante periodica. Aver trascurato lo smorzamento ai fini della ricerca della frequenza naturale non è una approssimazione troppo forte; il periodo naturale di vibrazione non varia sensibilmente con la viscosità. Pertanto la soluzione periodica della [2.32] è

$$[2.33] \quad s_{\max}(t) = \frac{d M_{\max}}{|K - (I + I_{add}) \omega^2|} \text{sen}(\omega t + \phi)$$

Si noti che la frequenza di risonanza della struttura in acqua vale

$$[2.34] \quad \omega_n = \sqrt{\frac{K}{I + I_{add}}}$$

che risulta minore della frequenza di risonanza della struttura nel vuoto

$$[2.35] \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I}}$$

Ciò significa che le oscillazioni libere in acqua sono più lente di quelle nel vuoto. L'aumento del periodo naturale è da imputarsi ad un aumento della massa del cilindro solido che quantitativamente è rappresentata dall'inerzia aggiunta I_{add} . L'interpretazione fisica del risultato precedente è la seguente: il cilindro per mettersi in moto, deve vincere, oltre la sua inerzia, anche l'inerzia delle particelle di fluido circostanti che lo avvolgono.

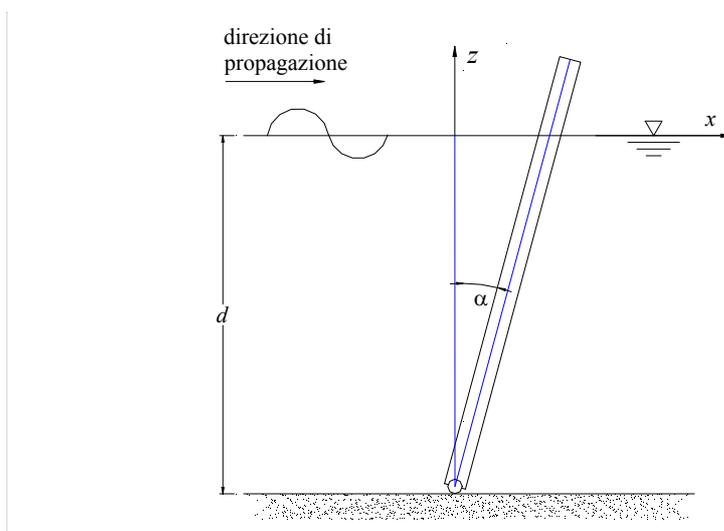


Figura 4. Schema del palo articolato.

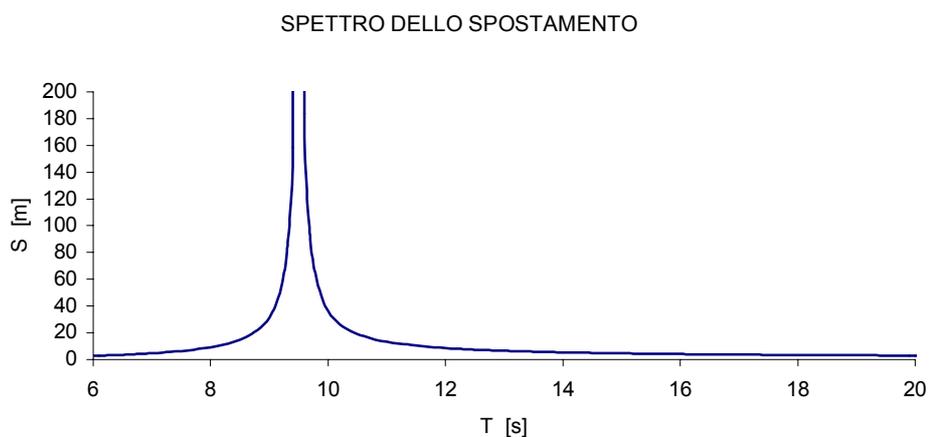


Figura 5. Spettro dello spostamento massimo per $d=125\text{ m}$, $a=2\text{ m}$, $T_n=8\text{ s}$, $H=30\text{ m}$.

Applicazioni

Si consideri un palo di raggio $a=2\text{ m}$ avente periodo di vibrazione naturale nel vuoto T_n pari a 8 secondi, su una profondità $d=125\text{ m}$. Un treno di onde periodiche con altezza d'onda $H=30\text{ m}$ e periodo $T=16.5\text{ s}$ investe il palo. Su quella profondità la lunghezza d'onda L vale 400 metri. In condizioni di regime il palo, dopo un breve transitorio oscillerà con un periodo di oscillazione pari a quello delle onde periodiche. L'ampiezza dello spostamento massimo in sommità vale $S_{\max}(T=16.5\text{ s})=3.87\text{ m}$. Si noti che lo spostamento ottenuto rispetta l'ipotesi di piccoli spostamenti infatti $S_{\max}/L=0.06$ e $S_{\max}/d=0.03$ cioè è uno spostamento piccolo sia rispetto alla lunghezza d'onda che alla dimensioni del palo. Si fa variare il periodo delle onde T mantenendo costanti le caratteristiche del palo e l'altezza delle onde incidenti; si calcola quindi lo spostamento massimo corrispondente ottenendo lo spettro dello spostamento massimo S_{\max} riportato in fig. 5. Si noti che lo spostamento si amplifica notevolmente se le onde che lo investono hanno un periodo compreso tra 9 e 10 secondi: si ha risonanza. Poiché la risonanza si verifica quando la forzante esterna oscilla con un periodo pari a quello naturale del sistema possiamo concludere che il periodo naturale di vibrazione del palo in acqua è circa 9.5 secondi ed è maggiore di quello nel vuoto che vale 8 secondi. I risultati precedenti non sono rigorosi (la soluzione dell'equazione del moto del palo non è rigorosa) ma sicuramente qualitativamente forniscono una visione d'insieme del fenomeno mettendone in luce gli aspetti più importanti.

3. PREVISIONE IN TEMPI LUNGI DELLO STATO DI SOLLECITAZIONE DI UN PALO FISSO

Premessa

Nel paragrafo 2.1 si è studiato lo stato di sollecitazione di un palo fisso soggetto all'azione di onde periodiche. Note le dimensioni dell'onda incidente (periodo T e altezza H) si riesce a valutare la forza massima nel tempo F_{\max} ed il momento massimo nel tempo M_{\max} mediante le (2.12). Note le caratteristiche di sollecitazione massime si può determinare la tensione massima di compressione σ_{\max} a cui è soggetta la sezione alla base del cilindro se le dimensioni del palo sono note; se non sono note, si può procedere al dimensionamento del palo imponendo che la tensione massima sia minore di quella ammissibile σ_{amm} .

Nel paragrafo successivo si esegue una previsione in tempi lunghi dello stato di sollecitazione del palo. Nota la località in cui è ubicata la struttura è possibile determinare la curva di probabilità $P[H_{\max}(L) > H]$. Fissata la vita di progetto L (funzione dell'importanza e funzionalità dell'opera) ed un livello di probabilità P (rischio di collasso o danneggiamento della struttura), si determina la soglia H_{\max} dell'altezza dell'onda massima che si realizzerà durante la vita L della struttura con probabilità P , mediante la procedura spiegata esaurientemente nel paragrafo 1. Nota l'altezza d'onda si calcola il periodo T_h mediante la (1.4): con probabilità P il periodo dell'onda massima può essere superiore al valore T_h . Note le dimensioni dell'onda si valutano le soglie di forza massima, di momento massimo e di tensione massima che possono essere superate con probabilità P . Variando il livello di probabilità si ricavano le curve di probabilità $P[F_{\max}(L) > F]$, $P[M_{\max}(L) > M]$, $P[\sigma_{\max}(L) > \sigma]$ per la località in esame.

3.1 Applicazione

La località sia Alghero. I parametri caratteristici risultano $u=1.118$ e $w=1.283$ m mentre $a_{10} = 5.7$ m e $b_{10} = 80$ ore (Boccotti 1997).

Si fissino come dati di progetto $L = 50$ anni, $P = 0.1$. Nella figura 1 è rappresentata la curva di probabilità di superamento dell'altezza dell'onda massima calcolata per $L=50$ anni. Per $P=0.1$ corrisponde $H=25$ metri ciò significa che l'altezza dell'onda massima che si realizzerà durante la vita di progetto della struttura ha una probabilità del 10% di superare la soglia di 25 m.

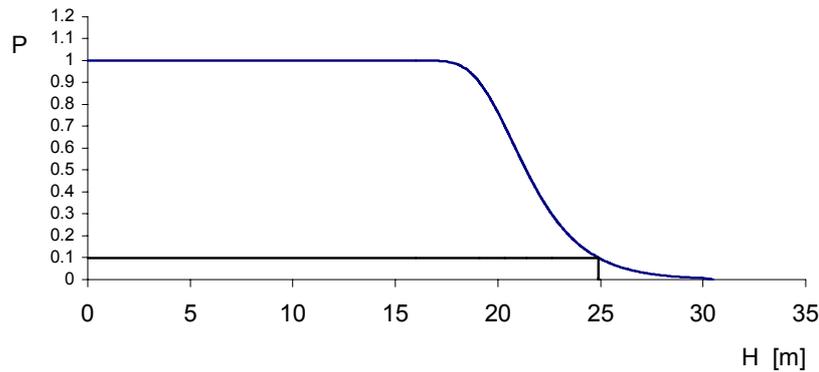


Figura 6. Località di Alghero; vita della struttura $L=50$ anni: la probabilità $P[H_{\max}(L) > H]$ che l'onda massima in 50 anni superi una qualsiasi soglia H .

L'onda massima di 25 m con grande probabilità si andrà a formare in uno stato di mare con altezza significativa di 12.5 m ed avrà un periodo T_h di 13.6 s.

Si consideri un palo di dimensioni $a=2$ m su una profondità $d=125$ m.

Il valore massimo del numero di Keulegan-Carpenter si realizza alla sommità del palo e vale $K_E = 20 > 5$ mentre il rapporto R_E/K_E è prossimo a 10^6 . Pertanto possiamo assumere $C_m = 1.85$, $C_d = 0.62$. La forza ed il momento massimo agenti sul palo note le dimensioni dell'onda di progetto possono essere valutati con le espressioni (2.12) ottenendo

$$F_{\max} = 296.4 \text{ t e } M_{\max} = 25072 \text{ tm}.$$

Note le sollecitazioni massime trasmesse al palo è possibile procedere al suo dimensionamento. Supponendo di voler realizzare un palo in acciaio, si determina lo spessore s in modo che la tensione massima nel punto più sollecitato del palo sia minore di quella ammissibile $\sigma_{\text{amm}} = 2400 \text{ kg/cm}^2$

Il momento d'inerzia della sezione del palo vale

$$I = 2\pi s a^3$$

e la tensione massima alla base del palo vale

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} a}{I} = \frac{M_{\max}}{2\pi s a^2}.$$

Se si impone $\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{amm}}$, ciò implica che

$$s \geq \frac{M_{\max}}{2\pi a^2 \sigma_{amm}} = s_{\min} .$$

Lo spessore minimo della sezione del palo deve essere $s_{\min} = 5 \text{ cm}$. Naturalmente bisogna tenere in considerazione i fenomeni d'instabilità globale dovuti al fatto che il palo è snello e pertanto lo spessore minimo da adottare sarà superiore a 5 cm. Si assume quindi $s = 10 \text{ cm}$. La tensione massima risulta

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{2\pi s a^2} = 998 \text{ Kg/cm}^2$$

Riassumendo, si ha una probabilità del 10% che l'altezza dell'onda massima nella vita della struttura superi i 25 m di altezza, e si è appena visto che tale onda è in grado di produrre una forza massima ed un momento massimo pari rispettivamente a 296.4 t e 25072 tm. Ciò comporta che la tensione massima alla base del palo vale 998 kg/cm². Quindi con probabilità del 10% la tensione massima alla base del palo durante la vita di progetto può superare la soglia 998 kg/cm². Ripetendo il ragionamento per diversi valori della probabilità P si ricavano le funzioni di figura 7 le quali forniscono rispettivamente

- 1) la probabilità che la forza massima F_{\max} agente palo superi una qualsiasi assegnata soglia F durante la vita $L=50$ anni: $P[F_{\max}(L) > F]$.
- 2) la probabilità che il momento massimo M_{\max} agente sul palo superi una qualsiasi assegnata soglia M durante la vita $L=50$ anni: $P[M_{\max}(L) > M]$.
- 3) la probabilità che tensione massima σ_{\max} alla base del palo superi una qualsiasi assegnata soglia σ durante la vita $L=50$ anni: $P[\sigma_{\max}(L) > \sigma]$.

I grafici precedenti mostrano semplicemente come, allo stato attuale, sia possibile delineare uno scenario molto dettagliato dello stato di sollecitazione cui una struttura offshore va incontro nella sua vita.

4. PREVISIONE IN TEMPI LUNGI DELLO SPOSTAMENTO MASSIMO DI UN PALO ARTICOLATO

Premessa

Nel paragrafo 2.2 si è studiato il moto di un palo articolato soggetto all'azione di onde periodiche. Note le dimensioni dell'onda incidente (periodo T e altezza H) si riesce a valutare lo spostamento massimo S_{\max} in sommità mediante la (2.33) ed il periodo naturale di vibrazione in acqua con la (2.34).

Nel paragrafo che segue si applicano i risultati precedenti per eseguire una previsione in tempi lunghi dello stato cinematico del palo. Fissata la vita di progetto L (funzione dell'importanza e funzionalità dell'opera) ed un livello di probabilità P (rischio di collasso o danneggiamento della struttura), si determina la soglia H_{\max} dell'altezza dell'onda massima che si realizzerà durante la vita L della struttura con probabilità P mediante la curva di probabilità $P[H_{\max}(L) > H]$ della località in cui la struttura è ubicata. Nota l'altezza d'onda si calcola il periodo T_h mediante la (1.4): con probabilità P il periodo dell'onda massima

può essere superiore al valore T_h . Note le dimensioni dell'onda si valutano le soglie di spostamento massimo S_{\max} che possono essere superate con probabilità P . Variando il livello di probabilità si ricavano le curve di probabilità $P[S_{\max}(L) > S]$, $P[T_h(L) > T]$ per la località in esame.

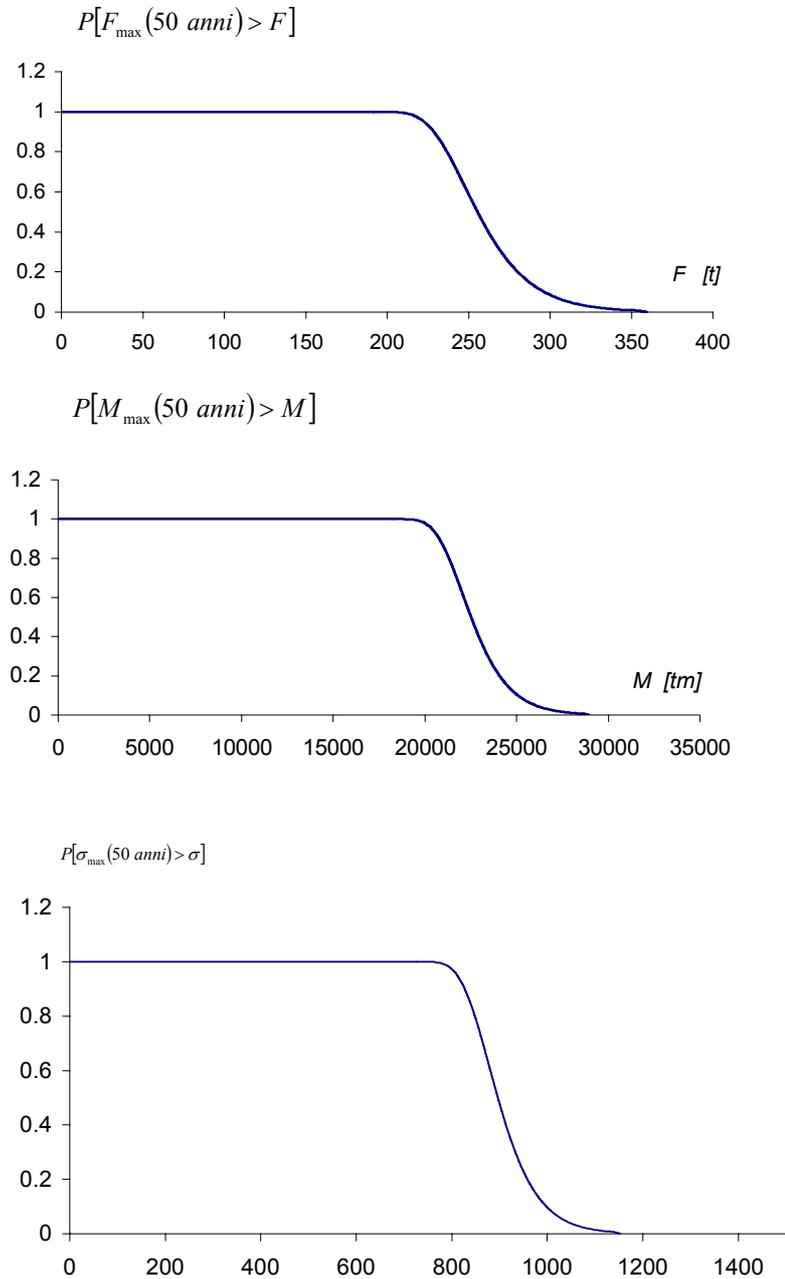


Figura 7. Località di Alghero; vita della struttura L=50 anni; le probabilità di superamento della forza massima, momento massimo e della tensione massima per L=50 anni.

4.1 Applicazione

Si consideri un palo articolato, avente diametro $a=5\text{m}$, posizionato al largo di Alghero. Sia il fondale $d=125\text{ m}$. I dati di progetto siano $L=100\text{ anni}$, $P=0.1$. Nella figura 8 è rappresentata la curva di probabilità di superamento dell'altezza dell'onda massima calcolata per $L=100\text{ anni}$. Per $P=0.1$ si ricava $H=26.2\text{m}$; quindi l'altezza dell'onda massima che si realizzerà durante la vita di progetto della struttura ha una probabilità del 10% di superare la soglia di 26.2 m.

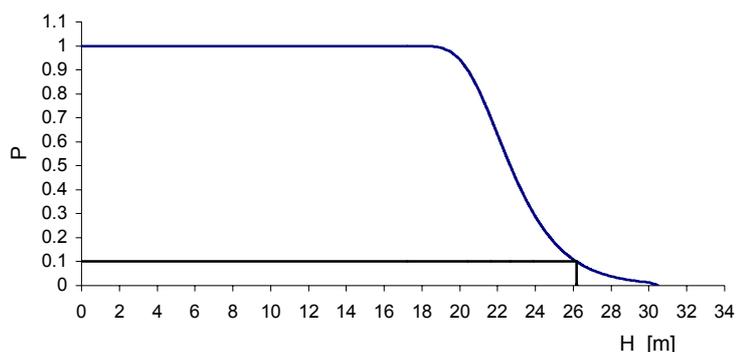


Figura 8. Località di Alghero; vita della struttura $L=100\text{ anni}$: la probabilità $P[H_{\max}(L)>H]$ che l'onda massima in 100 anni superi una qualsiasi soglia H .

L'onda massima di 26.2 metri, con grande probabilità, si andrà a formare in uno stato di mare con altezza significativa di 13.1 metri ed avrà un periodo T_h di 13.9 s. Il periodo naturale di vibrazione T_n nel vuoto si assume pari a 6 s; dalla formula (2.34) si ottiene che il periodo di vibrazione in acqua vale 7 secondi. Applicando la formula (2.34) lo spostamento massimo in sommità vale $S_{\max} = 1.9\text{ m}$. Ciò significa che con probabilità del 10% l'altezza dell'onda massima nella vita della struttura supera i 26.2 m di altezza, e tale onda è in grado di produrre uno spostamento orizzontale del palo articolato pari a 1.9 metri. Ripetendo il ragionamento per diversi valori della probabilità P si ricava la funzione di fig. 9 la quale fornisce la probabilità che lo spostamento massimo orizzontale S_{\max} superi una qualsiasi assegnata soglia S durante la vita L . Nel grafico successivo di fig. 9 è riportata la curva di probabilità di superamento del periodo T_h dell'onda massima che si realizza durante la vita di progetto. Dal diagramma risulta che in 100 anni il periodo dell'onda massima, quasi con certezza sarà superiore a 10 secondi. Poiché il periodo naturale di vibrazione della struttura in acqua vale 7 secondi si può affermare con certezza che durante la vita di progetto l'onda massima che si formerà non indurrà il sistema in risonanza. Attenzione, ciò non deve trarre in inganno facendo pensare che la struttura non andrà mai in risonanza. Infatti progettando la struttura con un periodo naturale piccolo è cautelata dal rischio di risonanza dovuto all'azione dei gruppi di onde alte che in generale hanno periodi superiori ai 10 secondi. La struttura può andare in collasso anche sotto l'azione di onde non eccessivamente alte (che hanno un'elevata probabilità di realizzarsi nel corso della stessa mareggiata in cui si realizza l'onda massima) che possono avere periodi inferiori ai 10 secondi. Pertanto ai fini della progettazione il periodo naturale del sistema deve essere molto grande per evitare che la struttura collassi sotto l'azione di stati di mare di debole intensità ma non tanto grande per evitare che si verifichi risonanza a causa dei gruppi di onde alte. Si conclude affermando che l'analisi previsionale è in grado di fornire un quadro d'insieme abbastanza dettagliato

dello stato di deformazione e sollecitazione cui una struttura off-shore va incontro durante la sua vita.

Figura 7. Località di Alghero; vita della struttura $L=50$ anni; le probabilità di superamento della forza massima, momento massimo e della tensione massima per $L=50$ anni.

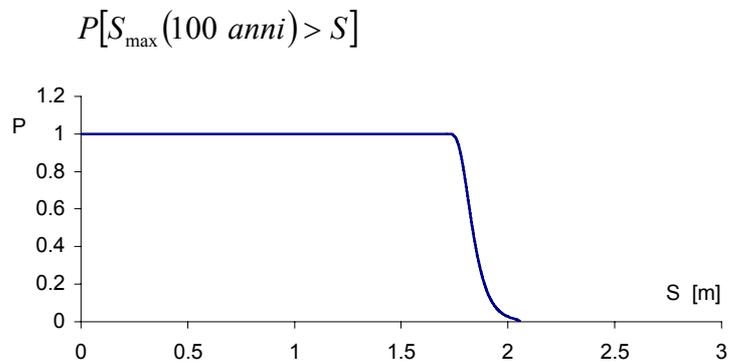
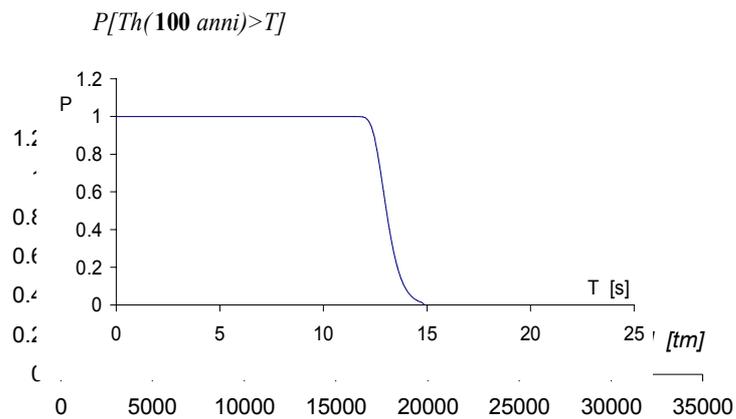


Figura 9. Località di Alghero; vita della struttura $L=100$ anni; le probabilità di superamento dello spostamento massimo e del periodo dell'onda massima per $L=100$ anni.

APPENDICE A

$$[A1] \quad P(H; H_s = h) = \exp\left[-\frac{4}{1 + \psi^*} \left(\frac{H}{h}\right)^2\right];$$

dove ψ^* è il parametro di larghezza dello spettro (Boccotti, 1984).

$$[A.2] \quad p(H; H_s = h) = \frac{8}{1 + \psi^*} \frac{H}{h^2} \exp\left[-\frac{4}{1 + \psi^*} \left(\frac{H}{h}\right)^2\right].$$

$$[A.3] \quad \bar{T}(h) = 22\sqrt{h / (4g)}.$$

$$[A.4] \quad p(H_s = h) = \frac{u}{w^u} h^{u-1} \exp\left[-\left(\frac{h}{w}\right)^u\right];$$

dove u e w sono i parametri caratteristici della località.

$$[A.5] \quad \bar{b}(a) = b_{10} \left(1.11 - 0.11 \frac{a}{a_{10}}\right),$$

dove a_{10} e b_{10} per i mari italiani sono stati ricavati da Boccotti (1997).

APPENDICE B

Si consideri la funzione periodica nell'intervallo. $-\pi \leq t \leq \pi$

$$f(t) = -a \operatorname{sen}(t) + b |\cos(t)| \cos(t)$$

con $a > 0$, $b > 0$. Risulta

$$f(t) = \begin{cases} -a \operatorname{sen}(t) + b \cos^2(t) & -\pi/2 \leq t \leq \pi/2 \\ -a \operatorname{sen}(t) - b \cos^2(t) & \pi/2 \leq |t| \leq \pi \end{cases}$$

Per ricavare il massimo assoluto di $f(t)$ è sufficiente studiare la funzione nell'intervallo $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ perché

$$\begin{aligned} f(\pi/2 \leq t \leq \pi) &= -f(0 \leq t \leq \pi/2) \\ f(-\pi \leq t \leq -\pi/2) &= -f(-\pi/2 \leq t \leq 0). \end{aligned}$$

Le prime due derivate valgono rispettivamente

$$\frac{df}{dt} = -\cos(t)[2b \sin(t) + a]$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = a \sin(t) - 2b \cos(t)$$

Pertanto se $s = -\frac{a}{2b} > 1$ esiste un solo massimo relativo per $t = -\frac{\pi}{2}$ infatti

$$\left. \frac{d^2 f}{dt^2} \right|_{t=-\frac{\pi}{2}} = -a$$

che è anche massimo assoluto che vale $f \Big|_{t=-\frac{\pi}{2}} = a$.

Per $s = -\frac{a}{2b} < 1$ esistono due massimi relativi per

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = -\frac{\pi}{2} \\ t_2 \text{ tale che } \begin{cases} \sin(t_2) = s \\ \cos(t_2) = +\sqrt{1-s^2} \end{cases} \end{array} \right.$$

infatti

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{d^2 f}{dt^2} \right|_{t=-\frac{\pi}{2}} = -a \\ \left. \frac{d^2 f}{dt^2} \right|_{t=t_2} = \frac{a^2}{2b} - 2b = 2b(s^2 - 1) < 0 \end{array} \right.$$

I rispettivi massimi relativi valgono

$$\left\{ \begin{array}{l} f \Big|_{t=-\frac{\pi}{2}} = a \\ f \Big|_{t=t_2} = b + \frac{a^2}{4b} = b(1 + s^2) \end{array} \right.$$

poiché risulta $s < 1$ il massimo assoluto si realizza per $t = t_2$ infatti

$$b + \frac{a^2}{4b} > a \Rightarrow 4b^2 + a^2 - 4ab > 0 \Rightarrow (2b - a)^2 > 0 \Rightarrow (1 - s^2) > 0$$

Per $s = -\frac{a}{2b} = 1$ i due massimi relativi coincidono.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- Abramowitz, M. and Stegun, I. A. **1965** *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York.
- Boccotti, P. **1983** *Sulla probabilità di onde di altezza assegnata*, Giornale del Genio Civile, 165-174;
- Boccotti, P. **1986a** *Previsione delle onde per i mari italiani* Atti XX Conv. di Idraulica Libreria Progetto Padova 79-91;
- Boccotti, P. **1986b** *On coastal and offshore structure risk analysis* Excerpta of the Italian Contribution to the Field of Hydraulic Engng. 1, 19-36.
- Boccotti, P. **1995** A *Field Experiment on the small-scale model of a gravity offshore platform* Ocean Engng, vol. 22, no. 6, pp. 615-627.
- Boccotti, P. **1996** *Inertial Wave Loads on Horizontal Cylinders: a Field Experiment*, Ocean Engng, vol. 23, no. 7, pp. 629-648.
- Boccotti, P. **1997** *Idraulica Marittima*, UTET.
- Chakrabarti, S. K. **1987** *Hydrodynamics of Offshore Structures*, Springer-Verlag, New York.
- Comincioli, V. **1980** *Analisi Numerica. Metodi Modelli Applicazioni*, McGraw-Hill.
- Gilardi, G. **1994** *Analisi Tre*, McGraw-Hill.
- Marchi, E. e Rubatta, A. **1981** *Meccanica dei Fluidi. Principi ed Applicazioni Idrauliche*, UTET.
- Sarpkaya, T. and Isaacson, M. **1981** *Mechanics of Wave Forces on Offshore Structures*, Van Nostrand Reinhold Co.