

# LA FORZA DELLE ONDE GENERATE DAL VENTO SU PALI VERTICALI

FRANCESCO FEDELE

*Dipartimento di Meccanica e Materiali, Università di Reggio Calabria*

## INTRODUZIONE

Nel lavoro vengono calcolate le sollecitazioni prodotte da onde generate dal vento su pali verticali. Allo scopo, utilizzando la teoria delle onde generate dal vento (Longuet-Higgins 1963, Phillips 1967) si ricavano i processi stocastici forza d'inerzia e forza di drag linearizzata (Hang Tuah et al. 1983). Infine, la teoria di quasi-determinismo delle onde (Boccotti 1983,1984,1997) consente di determinare le sollecitazioni sul palo prodotte da un'onda eccezionalmente alta (molto alta rispetto alla media dello stato di mare in cui si realizza).

## 1. LA TEORIA DELLE ONDE GENERATE DAL VENTO

La teoria generale delle onde generate dal vento, introdotta da Longuet-Higgins (1963) e da Phillips (1967), prevede la schematizzazione di uno stato di mare, vale a dire di una condizione ondosa sensibilmente stazionaria, come la somma di un numero  $N$  infinitamente grande di onde regolari cilindriche con ampiezze infinitesime e frequenze e fasi generalmente diverse tra loro. Le espressioni analitiche al primo ordine di Stokes dell'elevazione d'onda  $\eta(x,t)$  e del potenziale di velocità  $\Phi(x,z,t)$  relative ad onde irregolari bidimensionali risultano rispettivamente

$$\begin{aligned} [1.1] \quad \eta(x,t) &= \sum_{i=1}^N a_i \cos[k_i x - \omega_i t + \varepsilon_i] \\ \Phi(x,z,t) &= g \sum_{i=1}^N a_i \omega_i^{-1} \frac{\cosh[k_i(z+d)]}{\cosh(k_i d)} \sin[k_i x - \omega_i t + \varepsilon_i] \end{aligned}$$

con il numero d'onda  $k_i$  legato alla frequenza angolare  $\omega_i$  dalla relazione

$$[1.2] \quad k_i \operatorname{tgh}(k_i d) = \frac{\omega_i^2}{g}$$

La componente  $i$ -esima, di ampiezza  $a_i$  soddisfa il sistema delle equazioni lineari di Stokes. Ne consegue che anche la  $\eta(x,t)$  e la  $\Phi(x,z,t)$  [eq. 1.1] soddisfano lo stesso sistema di equazioni.

Utilizzando la teoria degli stati di mare si dimostra che fissato un punto  $(x,z)$ , se

- (i)  $N$  tende ad infinito;
- (ii) le fasi  $\varepsilon_i$  sono distribuite uniformemente sull'angolo giro e sono stocasticamente indipendenti tra loro;

(iii) le frequenze  $\omega_i$  sono tutte diverse tra di loro;

(iv) le ampiezze  $a_i$  sono infinitesime dello stesso ordine

l'elevazione d'onda  $\eta(x,t)$  e il potenziale di velocità  $\Phi(x,z,t)$  rappresentano processi stocastici gaussiani.

Si definisce poi lo spettro di frequenza  $E(\omega)$

$$[1.3] \quad E(\omega)\delta\omega = \sum_i \frac{1}{2} a_i^2 \quad \text{per } i \text{ tale che } \omega < \omega_i < \omega + \delta\omega$$

Uno spettro di frequenza, caratteristico delle pure onde di vento, è lo spettro JONSWAP (Hasselmann et al., 1973):

$$[1.4] \quad E(\omega) = Ag^2 \omega^{-5} \exp\left[-\frac{5}{4} \left(\frac{\omega_d}{\omega}\right)^4\right] \exp\left\{\ln \gamma \exp\left[-\frac{1}{2\chi^2} \frac{(\omega - \omega_d)^2}{\omega_d^2}\right]\right\}$$

in cui  $\omega_d$  è la frequenza dominante dello spettro.

I parametri  $\gamma, \chi$  determinano la forma dello spettro. Per spettro JONSWAP tali parametri risultano

$$[1.5] \quad \gamma = 0.08, \chi = 3.3 \quad .$$

### 1.1 Il campo di moto generato da uno stato di mare

Le componenti di velocità  $v_x$  e  $v_z$  ( Marchi e Rubatta 1981) nel caso di onde irregolari bidimensionali risultano rispettivamente

$$[1.6] \quad \begin{cases} v_x(x,z,t) = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = g \sum_{i=1}^N a_i k_i \omega_i^{-1} \frac{\cosh[k_i(z+d)]}{\cosh(k_i d)} \cos[k_i x - \omega_i t + \varepsilon_i] \\ v_z(x,z,t) = \frac{\partial\Phi}{\partial z} = g \sum_{i=1}^N a_i k_i \omega_i^{-1} \frac{\sinh[k_i(z+d)]}{\cosh(k_i d)} \sin[k_i x - \omega_i t + \varepsilon_i] \end{cases}$$

Analogamente le componenti  $a_x$  e  $a_z$  risultano rispettivamente

$$[1.7] \quad \begin{cases} a_x(x,z,t) = \frac{\partial v_x}{\partial t} = g \sum_{i=1}^N a_i k_i \frac{\cosh[k_i(z+d)]}{\cosh(k_i d)} \sin[k_i x - \omega_i t + \varepsilon_i] \\ a_z(x,z,t) = \frac{\partial v_z}{\partial t} = -g \sum_{i=1}^N a_i k_i \frac{\sinh[k_i(z+d)]}{\cosh(k_i d)} \cos[k_i x - \omega_i t + \varepsilon_i] \end{cases}$$

## 2. IL PROCESSO FORZA

Si consideri un palo verticale di raggio  $r$  su una profondità  $d$ , soggetto all'azione di onde irregolari bidimensionali (vedi fig. 1). Le azioni idrodinamiche unitarie si ricavano con la formula di Morison (Chakrabarti 1987 e Sarpkaya and Isaacson 1981) :

$$[2.1] \quad \vec{f}(t) = \vec{f}_m(t) + \vec{f}_d(t)$$

e in forma esplicita

$$[2.2] \quad \vec{f}(t) = C_m \rho \pi a^2 \vec{a}(t) + C_d \rho a |\vec{v}(t)| \vec{v}(t)$$

in cui  $\vec{a}, \vec{v}$  sono le proiezioni rispettivamente del vettore accelerazione e del vettore velocità nel piano della sezione del cilindro d'acqua equivalente (si intendono i valori nel centro della predetta sezione). La formula precedente semplifica notevolmente il calcolo delle azioni idrodinamiche perché fa riferimento al moto ideale in campo libero da ostacoli e prescinde dalla conoscenza del reale campo di moto intorno al cilindro solido.

La formula di Morison è dunque somma di due termini: il primo,  $\vec{f}_m(t)$  rappresenta la componente inerziale ovvero la forza che agisce sul cilindro d'acqua equivalente moltiplicata per un coefficiente d'inerzia  $C_m$ ; il secondo,  $\vec{f}_d(t)$  rappresenta la componente di drag e il fattore moltiplicativo  $C_d$  è il coefficiente di drag.

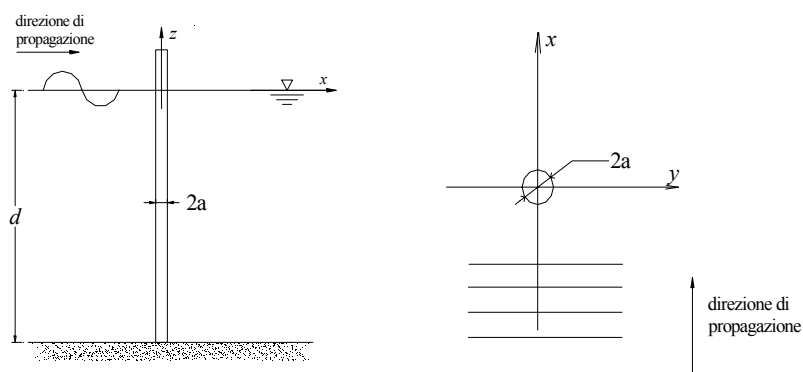


Figura 1 Schema di riferimento del palo fisso.

### 2.1 La componente inerziale $\vec{f}_m$

La componente inerziale dell'equazione di Morison risulta

$$[2.3] \quad \vec{f}_m(z,t) = f_{mx}(z,t) \hat{i} = C_m \rho \pi r^2 a_x(0,z,t) \hat{i}$$

con  $\hat{i}$  versore dell'asse  $x$ . Sostituendo all'accelerazione  $a_x$  la prima espressione della [1.7] si ricava

$$[2.4] \quad f_{mx}(z, t) = \sum_{i=1}^N F_i \text{sen}[\omega_i t - \varepsilon_i]$$

con

$$[2.5] \quad F_i = -C_m \rho \pi r^2 g a_i k_i \frac{\cosh[k_i(z+d)]}{\cosh(k_i d)}$$

dove  $C_m$  è il coefficiente d'inerzia per onde irregolari ed  $r$  è il raggio del palo .

Pertanto la forza d'inerzia generata da uno stato di mare è un processo stocastico gaussiano. Lo spettro della forza d'inerzia vale

$$[2.6] \quad E_m(\omega) \delta\omega = \sum_i \frac{1}{2} F_i^2 \quad \text{per } i \text{ tale che } \omega < \omega_i < \omega + \delta\omega$$

e sostituendo la [2.3]

$$[2.7] \quad E_m(\omega) \delta\omega = \sum_i \frac{1}{2} a_i^2 \left[ C_m \rho \pi r^2 g k_i \frac{\cosh[k_i(z+d)]}{\cosh(k_i d)} \right]^2 \quad \text{per } i \text{ tale che } \omega < \omega_i < \omega + \delta\omega$$

da cui segue

$$[2.8] \quad E_m(\omega) = E(\omega) Z_m(\omega) \quad \text{con} \quad Z_m(\omega) = \left[ C_m \rho \pi r^2 g k \frac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh(kd)} \right]^2$$

Il valore  $\sqrt{Z_m(\omega)}$  rappresenta l'ampiezza della forza d'inerzia prodotta da un'onda regolare di frequenza  $\omega$  e ampiezza unitaria. Noto l'andamento in frequenza della funzione precedente è possibile individuare le componenti ondose dello stato di mare che sollecitano in misura maggiore la struttura.

La funzione di autocovarianza del processo forza d'inerzia vale

$$[2.9] \quad \Psi_m(T) = \langle f_{mx}(t) f_{mx}(t+T) \rangle = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} F_i^2 \cos(\omega_i T)$$

e, in funzione dello spettro del processo forza:

$$[2.10] \quad \Psi_m(T) = \int_0^{\infty} E_m(\omega) \cos(\omega T) d\omega = \int_0^{\infty} E(\omega) Z_m(\omega) \cos(\omega T) d\omega .$$

L'equazione [2.10] in forma esplicita diventa

$$[2.11] \quad \Psi_m(T) = \int_0^{\infty} E(\omega) \left[ C_m \rho \pi r^2 g k \frac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh(kd)} \right]^2 \cos(\omega T) d\omega .$$

La varianza  $\sigma_m^2$  del processo  $f_{mx}$  coincide con il valore della funzione autocovarianza  $\Psi_m$ , calcolata per  $T = 0$ :

$$[2.12] \quad \sigma_m^2 = \Psi_m(T=0) = \int_0^\infty E(\omega) \left[ C_m \rho \pi r^2 g k \frac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh(kd)} \right]^2 d\omega$$

## 2.2 La componente di drag $\bar{f}_d$

La forza di drag risulta

$$[2.13] \quad \bar{f}_d(z,t) = f_{dx}(z,t) \hat{i} = C_d \rho r |v_x(0,z,t)| v_x(0,z,t) \hat{i}$$

in cui  $\hat{i}$  è il versore dell'asse  $x$  e  $C_d$  è il coefficiente di drag.

Il termine non lineare nelle velocità implica che il processo stocastico forza di drag non è gaussiano. Pertanto non è possibile applicare la teoria degli stati di mare.

Nell'appendice si dimostra ( Hang Tuah et al. 1983) che dato un processo gaussiano  $v(t)$ , se

$$[2.14] \quad \frac{\Psi_v(T)}{\sigma_v^2} \ll 1$$

essendo  $\Psi_v(T)$ ,  $\sigma_v^2$  rispettivamente la funzione di autocovarianza del processo e la sua varianza, allora il processo  $|v(t)|v(t)$  è statisticamente equivalente al processo  $\sqrt{8/\pi} \sigma_v v(t)$ .

Pertanto il processo forza di drag (non gaussiano) è statisticamente equivalente al processo gaussiano

$$[2.15] \quad f_{dx}(z,t) = C_d \rho r |v_x(0,z,t)| v_x(0,z,t) \approx C_d \rho r \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma_{v_x}(z) v_x(0,z,t)$$

con  $\sigma_{v_x}$  deviazione standard del processo velocità, che risulta

$$[2.16] \quad \sigma_{v_x}^2(z) = \int_0^\infty E(\omega) \left[ g k \omega^{-1} \frac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh(kd)} \right]^2 d\omega$$

ovvero, in forma esplicita

$$[2.17] \quad f_{dx}(z,t) = \sum_{i=1}^N G_i \cos[\omega_i t - \varepsilon_i]$$

con

$$[2.18] \quad G_i = C_d \rho r g \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma_{v_x} a_i k_i \omega_i^{-1} \frac{\cosh[k_i(z+d)]}{\cosh(k_i d)}$$

Lo spettro della forza di *drag linearizzata* vale

$$[2.19] \quad E_d(\omega) \delta\omega = \sum_i \frac{1}{2} G_i^2 \quad \text{per } i \text{ tale che } \omega < \omega_i < \omega + \delta\omega$$

da cui sostituendo a  $G_i$  la [2.18], si ricava

$$[2.20] \quad E_d(\omega)\delta\omega = \sum_i \frac{1}{2} a_i^2 \left[ C_d \rho r g \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma_{v_x} k_i \omega_i^{-1} \frac{\cosh[k_i(z+d)]}{\cosh(k_i d)} \right]^2 \quad \text{per } i \text{ tale che } \omega < \omega_i < \omega + \delta\omega$$

e in forma compatta

$$[2.21] \quad E_d(\omega) = E(\omega) Z_d(\omega) \quad \text{con} \quad Z_d(\omega) = \left[ C_d \rho r g \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma_{v_x} k \omega^{-1} \frac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh(kd)} \right]^2$$

La funzione  $\sqrt{Z_d(\omega)}$  rappresenta l'ampiezza della componente di *drag linearizzata* prodotta da una singola componente periodica di frequenza  $\omega$ .

La funzione di autocovarianza del processo forza di *drag linearizzata* vale

$$[2.22] \quad \Psi_d(T) = \langle f_{dx}(t) f_{dx}(t+T) \rangle = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} G_i^2 \cos(\omega_i T)$$

e, in funzione dello spettro del processo forza

$$[2.23] \quad \Psi_d(T) = \int_0^{\infty} E_d(\omega) \cos(\omega T) d\omega = \int_0^{\infty} E(\omega) Z_d(\omega) \cos(\omega T) d\omega.$$

La [2.23] in forma esplicita diventa

$$[2.24] \quad \Psi_d(T) = \int_0^{\infty} E(\omega) \left[ C_d \rho \pi r^2 g \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma_{v_x} k \omega^{-1} \frac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh(kd)} \right]^2 \cos(\omega T) d\omega.$$

La deviazione standard  $\sigma_d$  del processo  $f_{dx}(t)$  risulta:

$$[2.25] \quad \sigma_d^2 = \Psi_d(T=0) = \int_0^{\infty} E(\omega) \left[ C_d \rho \pi r^2 g \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma_{v_x} k \frac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh(kd)} \right]^2 d\omega$$

### 2.3 Applicazione

Si consideri un palo avente raggio  $r=2$  m, soggetto all'azione di onde irregolari bidimensionali aventi direzione di propagazione coincidente con l'asse  $x$  e periodo dominante  $T_p = 16$  s. La profondità risulti  $d=125$  m. Si assuma uno spettro in frequenza JONSWAP.

Le figure 3 e 4 riportano rispettivamente gli spettri  $E_m(\omega/\omega_d)$ ,  $E_d(\omega/\omega_d)$  e le funzioni  $Z_m(\omega/\omega_d)$ ,  $Z_d(\omega/\omega_d)$  per  $z/L_d = -0.013$  e per  $z/L_d = -0.157$ . Nella figura 5 sono riportate le rispettive funzioni di autocovarianza.

Dai processi forza di drag [2.17] e forza d'inerzia [2.4] si possono ricavare le deviazioni standard  $\sigma_d$  e  $\sigma_m$  in corrispondenza di un'assegnata profondità  $z/L_d$ .

Ad esempio, per  $z/L_d = -0.013$  le deviazioni standard dei processi forza valgono

$$\sigma_m = 1.585 \text{ t/m}$$

$$\sigma_d = 0.679 \text{ t/m}$$

ed il rapporto  $\sigma_d/\sigma_m$  risulta uguale a 0.43 . In altri termini l'ampiezza della forza massima attesa di drag  $\overline{F_d}$  è il 43% dell'ampiezza della forza massima attesa d'inerzia  $\overline{F_m}$  (in un processo stocastico di una grandezza fisica il valore massimo atteso della grandezza è proporzionale alla deviazione standard del processo aleatorio).

Analogamente per  $z/L_d = -0.157$  le deviazioni standard dei processi forza valgono invece

$$\sigma_m = 0.423 \text{ t/m}$$

$$\sigma_d = 0.088 \text{ t/m}$$

Essendo  $\sigma_d/\sigma_m \cong 0.21$ , la forza massima attesa di drag  $\overline{F_d}$  è il 21% della forza massima attesa d'inerzia  $\overline{F_m}$ .

Quindi aumentando la profondità sia la componente di drag che la componente d'inerzia si attenuano ma l'attenuazione della prima è maggiore della seconda. Ciò significa che da una certa profondità in poi la forza di drag diventa trascurabile rispetto a quella d'inerzia. Dal punto di vista fisico, aumentando la profondità ci avviciniamo alle condizioni di moto ideale; la forza sul palo ha pertanto caratteristiche prevalentemente inerziali.

La funzione  $Z_m(x = \omega/\omega_d)$  per  $d \rightarrow \infty$  (profondità infinita) presenta un massimo per  $\omega_{lim} = \sqrt{g/|z|}$ . Le componenti ondose con frequenza  $\omega \gg \omega_{lim}$  vengono attenuate. Accade però che su basse profondità ( $|z| \rightarrow 0$ ) quasi tutte le componenti ondose vengono esaltate, infatti  $\omega_{lim} \rightarrow \infty$ . Per tale motivo lo spettro della forza d'inerzia alle basse profondità si allarga rispetto allo spettro delle onde. Aumentando la profondità solo le componenti ondose in alta frequenza si attenuano e lo spettro della forza d'inerzia si restringe. Ciò è anche evidente analizzando le funzioni di autocovarianza  $\Psi_m(T)$ : alla profondità  $z/L_d = -0.013$  il parametro  $\Psi^* = 0.32$  (rapporto tra il primo minimo assoluto della  $\Psi_m(T)$  il suo massimo assoluto) mentre alla profondità  $z/L_d = -0.157$  vale  $\Psi^* = 0.73$  (per spettro JONSWAP medio risulta  $\Psi^* = 0.73$ ).

Un analogo ragionamento può essere fatto per la funzione  $Z_d(\omega/\omega_d)$ . Anche per la forza di drag lo spettro della forza alle basse profondità si allarga rispetto allo spettro delle onde in superficie, mentre aumentando la profondità le componenti ondose in alta frequenza si attenuano e lo spettro si restringe (dalla funzione di autocovarianza  $\Psi_d(T)$ , per  $z/L_d = -0.013 \Rightarrow \Psi^* = 0.45$  mentre per  $z/L_d = -0.157 \Rightarrow \Psi^* = 0.7$ )

## 2.4 La forza totale

Consideriamo adesso il processo forza totale d'inerzia intendendo per 'forza totale' la forza d'inerzia risultante agente sul palo. La componente elementare ondosa produce una forza d'inerzia totale che vale

$$[2.26] \quad [F_{mx}(t)]_i = \int_{-d}^0 [f_{mx}(z,t)]_i dz$$

ed una forza totale di drag

$$[2.27] \quad [F_{dx}(t)]_i = \int_{-d}^0 [f_{dx}(z,t)]_i dz$$

In particolare, assumendo i coefficienti  $C_m$  e  $C_d$  indipendenti da  $z$  (v. ad esempio Chakrabarti 1987), le equazioni [2.26] e [2.27] si riducono rispettivamente a:

$$[2.28] \quad F_{mx}(t) = -C_m \rho \pi r^2 g \sum_{i=1}^N a_i \tanh[k_i d] \text{sen}[\omega_i t - \varepsilon_i]$$

$$[2.29] \quad F_{dx}(t) = C_d \rho r g \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sum_{i=1}^N a_i k_i \omega_i^{-1} \frac{1}{\cosh(k_i d)} \left[ \int_{-d}^0 \sigma_{v_x} \cosh[k_i(z+d)] dz \right] \cos[\omega_i t - \varepsilon_i]$$

da cui seguono, rispettivamente, le deviazioni standard

$$[2.30] \quad \sigma_m = C_m \rho \pi r^2 g \sqrt{\int_0^\infty E(\omega) \tanh^2[kd] d\omega}$$

$$[2.31] \quad \sigma_d = C_d \rho r g \sqrt{\frac{8}{\pi} \int_0^\infty E(\omega) k^2 \omega^{-2} \frac{1}{\cosh^2(kd)} \left[ \int_{-d}^0 \sigma_{v_x} \cosh[k(z+d)] dz \right]^2 d\omega}$$

Il rapporto tra la forza totale massima attesa d'inerzia e la forza totale massima attesa di drag vale

$$[2.32] \quad \frac{\overline{F_m}}{\overline{F_d}} = \frac{C_m}{C_d} \pi r \sqrt{\frac{\int_0^\infty E(\omega) \tanh^2(kd) d\omega}{\frac{8}{\pi} \int_0^\infty E(\omega) k^2 \omega^{-2} \frac{1}{\cosh^2(kd)} \left[ \int_{-d}^0 \sigma_{v_x} \cosh[k(z+d)] dz \right]^2 d\omega}}$$

Dall'applicazione della formule precedenti ( $d=125$  m,  $T_p=16$  s,  $C_m=2$ ,  $C_d=0.65$ ) risulta:

i) per  $r_1=0.5$  m

$$\begin{cases} \sigma_m = 4.81 \text{ t} \\ \sigma_d = 2.21 \text{ t} \end{cases} \Rightarrow \frac{\sigma_d}{\sigma_m} = 0.46$$

ii) per  $r_2=10$  m,  $r_1=5$  m

$$\begin{cases} \sigma_m = 481.4 \text{ t} \\ \sigma_d = 22.3 \text{ t} \end{cases} \Rightarrow \frac{\sigma_d}{\sigma_m} = 0.05$$

Si noti che nel caso (i) (raggio= $r_1$ ) la forza massima attesa di drag risulta il 46% della forza massima attesa d'inerzia; nel caso (ii) (raggio= $10r_1$ ) la forza massima attesa di drag si riduce al



5% della forza massima attesa d'inerzia. Pertanto per pali aventi raggi superiori a 5 metri la componente di drag può essere trascurata. E quindi il moto intorno al palo può ritenersi ideale. La figura 6 conferma questo risultato: essa mostra l'andamento del termine  $\overline{F_m} / (\overline{F_d} + \overline{F_m})$  in funzione del raggio del palo, fissati  $d=125\text{m}$  e  $T_p = 16 \text{ s}$ .

In generale, per verificare se il moto può ritenersi ideale, si può calcolare il numero di Keulegan-Carpenter

$$KC = \frac{(v_x)_{\max} T_p}{2r}$$

dove  $(v_x)_{\max}$  è la velocità massima del campo di moto prodotto dall'onda massima attesa.

Secondo Sarpkaya e Isaacson il moto è ideale se  $KC < 1$ . Boccotti (1995, 1996), nel corso di due esperimenti eseguiti direttamente in mare, ha osservato che il moto può ritenersi ideale fino a  $KC = 5 \div 6$ .

Nel caso in esame, assumendo  $r=6 \text{ m}$ , il campo di moto può ritenersi ideale e il numero di Keulegan-Carpenter risulta uguale a 6.

L'analisi svolta non consente di ricavare la storia temporale della forza sul palo. Questo problema può essere superato utilizzando la teoria di Quasi-determinismo. La teoria afferma che se si forma un'onda molto alta in corrispondenza del palo, allora con altissima probabilità su quel palo è transitato un ben definito gruppo di onde del quale si conosce la sua storia temporale.

### 3. LA TEORIA DI QUASI-DETERMINISMO

La teoria di quasi-determinismo introdotta da Boccotti, consente di prevedere con grandissima probabilità, ammesso che in un punto del campo di moto di coordinate  $(x_0, y_0)$  nell'istante  $t_0$  si formi un'onda di altezza  $H$  molto grande rispetto alla media, sia l'elevazione d'onda e sia il potenziale di velocità del gruppo di onde in cui si è formata l'onda molto grande. L'elevazione d'onda in un punto  $(x_0 + X, y_0)$  in un istante  $t_0 + T$  sarà vicinissima al seguente valore deterministico :

$$[3.1] \quad \overline{\eta}(x_0 + X, t_0 + T) = \frac{H \langle \eta(x_0, t) \eta(x_0 + X, t + T) \rangle - \langle \eta(x_0, t) \rangle \langle \eta(x_0 + X, t + T - T^*) \rangle}{\langle \eta^2(x_0, t) \rangle - \langle \eta(x_0, t) \rangle \langle \eta(x_0, t + T^*) \rangle}$$

ed il potenziale di velocità alla profondità  $z$  sarà vicinissimo al seguente valore deterministico

$$[3.2] \quad \overline{\Phi}(x_0 + X, t_0 + T) = \frac{H \langle \eta(x_0, t) \Phi(x_0 + X, z, t + T) \rangle - \langle \eta(x_0, t) \rangle \langle \Phi(x_0 + X, z, t + T - T^*) \rangle}{\langle \eta^2(x_0, t) \rangle - \langle \eta(x_0, t) \rangle \langle \eta(x_0, t + T^*) \rangle}$$

dove  $\eta$ ,  $\Phi$  sono rispettivamente i processi stocastici definiti dalle formule [1.1] e  $T^*$  è l'ascissa del minimo assoluto della funzione di autocovarianza così definita :

$$[3.3] \quad \Psi(T) = \langle \eta(x_0, t) \eta(x_0, t + T) \rangle$$

La teoria di quasi-determinismo è rigorosa al limite per  $H/\sigma \rightarrow \infty$ . In realtà Boccotti ha ricavato per via sperimentale che la teoria può essere applicata per  $H/\sigma > 7 \div 8$ .

Il campo di moto deterministico generato dal gruppo di onde risulta

$$[3.4] \quad \begin{cases} \bar{v}_x(x_0 + X, z, t_0 + T) = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial X} \\ \bar{v}_z(x_0 + X, z, t_0 + T) = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z} \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{a}_x(x_0 + X, z, t_0 + T) = \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial T} \\ \bar{a}_z(x_0 + X, z, t_0 + T) = \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial T} \end{cases}$$

La forza deterministica sul palo (componente d'inerzia e di drag), calcolata in una sezione risulta:

$$[3.5] \quad \bar{f}_x(z, t_0 + T) = C_m \rho \pi r^2 \bar{a}_x(x_0, t_0 + T) + C_d \rho r |\bar{v}_x(x_0, t_0 + T)| \bar{v}_x(x_0, t_0 + T).$$

La forza ed il momento totale valgono rispettivamente

$$[3.6] \quad \bar{F}_x(t_0 + T) = \int_{-d}^0 [C_m \rho \pi r^2 \bar{a}_x(x_0, t_0 + T) + C_d \rho r |\bar{v}_x(x_0, t_0 + T)| \bar{v}_x(x_0, t_0 + T)] dz$$

$$[3.7] \quad M(t_0 + T) = \int_{-d}^0 \bar{f}_x(z, t_0 + T)(z + d) dz$$

Esplicitando le covarianze spazio-temporali si ottengono le formule [3.8]

$$\bar{v}_x(x_0 + X, z, t_0 + T) = g \frac{H}{2} k_p \omega_p^{-1} \frac{\int_0^\infty \tilde{E}(w) w^{-1} \frac{\cosh[\tilde{k}(w) k_p (z + d)]}{\cosh[\tilde{k}(w) k_p d]} \tilde{k}(w) \{ \cos[H(X, w, T)] - \cos[H(X, w, T - T^*)] \} dw}{\int_0^\infty \tilde{E}(w) [1 - \cos(w \omega_p T^*)] dw}$$

$$\bar{a}_x(x_0 + X, z, t_0 + T) = g \frac{H}{2} k_p \frac{\int_0^\infty \tilde{E}(w) \frac{\cosh[\tilde{k}(w) k_p (z + d)]}{\cosh[\tilde{k}(w) k_p d]} \tilde{k}(w) \{ \text{sen}[H(X, w, T)] - \text{sen}[H(X, w, T - T^*)] \} dw}{\int_0^\infty \tilde{E}(w) [1 - \cos(w \omega_p T^*)] dw}$$

con

$$H(X, w, \tau) = \tilde{k}(w) k_p X - w \omega_p \tau$$

$$\tilde{k}(w) \tanh[\tilde{k}(w) k_p d] = w^2$$

$$E(w \omega_p) = A g^2 \omega_p^{-5} \tilde{E}(w)$$

$$k_p = \frac{2\pi}{L_p} \quad \omega_p = \frac{2\pi}{T_p} \quad L_p = \frac{g T_p^2}{2\pi}$$

dove  $L_p$  è la lunghezza d'onda su profondità infinita corrispondente al periodo dominante  $T_p$ .

### 3.1 Applicazione

Come applicazione dei risultati precedenti si consideri un palo di diametro  $2r=4$  m investito da un gruppo d'onde che al culmine della fase di sviluppo assume un'altezza  $H=30$  m con periodo dominante  $T_p = 16$  s. La profondità  $d$  è uguale a 125 m.

La figura 7 riporta:

- i) la storia temporale dell'elevazione d'onda in superficie in corrispondenza del centro del palo,
- ii) la componente inerziale della forza prodotta dall'onda molto alta;
- iii) la componente di drag della forza prodotta dall'onda molto alta;
- iv) La forza totale prodotta dall'onda molto alta.

Si noti che il gruppo di onde assume la sua massima altezza quando transita per il centro del palo. In questo istante la forza d'inerzia è nulla mentre quella di drag è massima. Negli istanti di zero up-crossing (zero down-crossing) la forza d'inerzia assume dei minimi (massimi) relativi mentre la forza di drag è nulla.

Il massimo valore della forza d'inerzia è  $F_m = 290$  t; il massimo valore della forza di drag è  $F_d = 148$  t. La forza totale massima risulta  $F_t = 300$  t. La figura 8 mostra la storia temporale del momento (rispetto alla base del palo). I massimi valori assunti dai momenti prodotti dalle forze  $F_m$ ,  $F_d$  e  $F_t$  risultano rispettivamente:

$$M_m = 32300 \text{ tm}, M_d = 17890 \text{ tm} \text{ e } M_t = 32430 \text{ tm}.$$

Note le sollecitazioni massime che il gruppo di onde trasmette al palo è possibile procedere al suo dimensionamento. Ad esempio dovendo dimensionare un palo in acciaio, si determina lo spessore  $s$  imponendo che la tensione massima nel punto più sollecitato del palo sia minore di quella ammissibile  $\sigma_{amm} = 2400 \text{ kg/cm}^2$ .

Il momento d'inerzia della sezione del palo vale

$$I = 2\pi sr^3$$

e la tensione massima alla base del palo vale

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} r}{I} = \frac{M_{\max}}{2\pi sr^2}$$

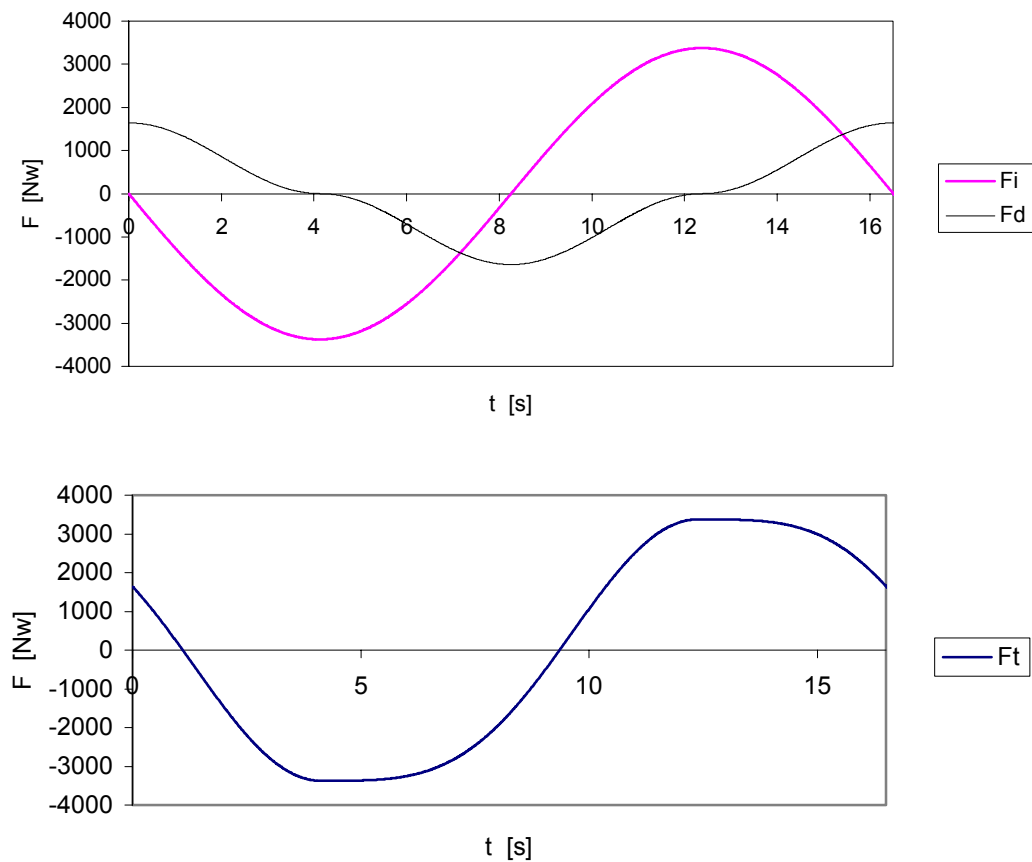
Imponendo  $\sigma_{\max} \leq \sigma_{amm}$  si ricava:

$$s \geq \frac{M_{\max}}{2\pi r^2 \sigma_{amm}} = s_{\min}$$

Lo spessore minimo della sezione del palo risulta  $s_{\min} = 3$  cm. Naturalmente bisogna tenere in considerazione i fenomeni d'instabilità globale dovuti al fatto che il palo è snello e pertanto lo spessore minimo da adottare sarà superiore a 3 cm.

L'aspetto importante è che la teoria di quasi-determinismo consente di ricostruire la storia temporale delle sollecitazioni prodotte dai caratteristici gruppi di onde tridimensionali che investono il palo al culmine della loro fase di sviluppo. Tale risultato trova applicazioni nel

campo dell'ingegneria offshore, in particolare nella progettazione delle piattaforme a struttura reticolare.



**Figura 2** Andamento nel tempo delle componenti di forza inerziale e di drag e della forza totale per  $d=125$  m ,  $a=2$  m,  $H=30$  m e  $T=16.5$  s.

## APPENDICE

Consideriamo un processo stocastico gaussiano  $u(t)$ . Calcoliamo la funzione di autocovarianza del processo  $|u(t)|u(t)$ . Risulta (Hang Tuah et al. 1983)

$$\Psi(T) = \overline{|u(t)|u(t)|u(t+T)|u(t+T)} = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} |u_1| |u_1| |u_2| |u_2| p(u_1, u_2) du_1 du_2$$

con

$$p(u_1, u_2) = \frac{1}{2\pi} (\sigma_u^4 - \Psi_u^2)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2} \frac{\sigma_u^2 u_1^2 + \sigma_u^2 u_2^2 - 2\Psi_u u_1 u_2}{\sigma_u^4 - \Psi_u^2}}$$

e

$\Psi_u(T) = \overline{u(t)u(t+T)}$ ,  $\sigma_u^2$  autocovarianza e varianza del processo  $u(t)$ .

Posto

$$\begin{cases} u_1 = \sigma_u (1 - r^2) x_1 \\ u_2 = \sigma_u (1 - r^2) x_2 \end{cases}$$

risulta

$$\Psi(T) = \frac{1}{2\pi} \sigma_u^4 (1 - r^2)^{5/2} I$$

con

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |x_1| |x_2| x_1 x_2 e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - 2r x_1 x_2} dx_1 dx_2$$

$$\text{e } r = \frac{\Psi_u}{\sigma_u^2}$$

Calcoliamo l'integrale I. Hang Tuah et al. (1983) lo risolvono mediante l'uso della trasformata di Laplace. Qui si propone un metodo alternativo più semplice. Risulta

$$I = 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} x_1^2 x_2^2 e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)} \sinh(r x_1 x_2) dx_1 dx_2$$

sviluppando in serie di Mac-Lauren il seno iperbolico risulta

$$I = 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} x_1^2 x_2^2 e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r x_1 x_2)^{2n+1}}{(2n+1)!} dx_1 dx_2$$

per l'uniforme convergenza dello sviluppo in serie

$$I = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!} \left[ \int_0^{+\infty} x^{2n+3} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \right]^2$$

dove

$$\int_0^{+\infty} x^{2n+3} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = (2n+2)!!$$

pertanto

$$I = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!} r^{2n+1}$$

la serie è convergente per  $r < 1$ , come si può constatare applicando il criterio del rapporto. Quindi

$$\Psi(T) = 4 \frac{1}{2\pi} \sigma_u^4 (1 - r^2)^{5/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!} r^{2n+1}$$

Per  $r \ll 1$   $(1 - r^2)^{5/2} \cong 1 - \frac{5}{2} r^2$  mentre  $I \cong 8r$  e pertanto

$$\Psi(T) \cong \frac{8}{\pi} \sigma_u^2 r = \frac{8}{\pi} \sigma_u^2 \Psi_u(T)$$

la funzione precedente è l'autocovarianza del processo  $\sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma_u u(t)$  e pertanto possiamo concludere che il processo  $|u(t)|u(t)$  è statisticamente equivalente al processo  $\sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma_u u(t)$ .

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- Abramowitz, M. and Stegun, I. A. **1965** *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York.
- Boccotti, P. **1983** *Some new results on statistical properties of wind waves*, Applied Ocean Research, 5, 33-39;
- Boccotti, P. **1984** *Sea waves and quasi-determinism of rare events in random processes*, Proc.Nat. Acc. Lincei rendiconti 76,119-127;
- Boccotti, P. **1995** *A field experiment on the small-scale model of a gravity offshore platform* Ocean Engng, 22, 6, 615-627.
- Boccotti, P. **1996** *Inertial wave loads on horizontal cylinders : a field experiment*. Ocean Engng. **23**, 629-648.
- Boccotti, P. **1997** *Idraulica Marittima*, UTET.
- Chakrabarti, S. K. **1987** *Hydrodynamics of Offshore Structures*, Springer-Verlag, New York.
- Comincioli, V. **1980** *Analisi Numerica. Metodi Modelli Applicazioni*, McGraw-Hill.
- Gilardi, G. **1994** *Analisi Tre*, McGraw-Hill.

Hang Tuah and Robert T. Hudspeth **1983** *Nondeterministic wave force on fixed small vertical piles*, Applied Ocean Research, 5, 49-54;

Hasselmann K. et al. **1973** *Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP)*, Deut. Hydrogr. Zeit. , 12

Marchi, E. e Rubatta, A. **1981** *Meccanica dei Fluidi. Principi ed Applicazioni Idrauliche*, UTET.

M. S. Longuet-Higgins **1963** *The effects of non-linearities on statistical distributions in the theory of sea waves* J. Fluid Mech. 17,459-480;

O. M. Phillips **1967** *The theory of wind generated waves* Advances in Hydroscience 4, 119-149;

Sarpkaya, T. and Isaacson, M. **1981** *Mechanics of Wave Forces on Offshore Structures*, Van Nostrand Reinhold Co.