APPENDICE

Potenziali singolari di Ogilvie

Consideriamo le funzioni complesse di variabile complessa $z = x + iy$ definite dalle espressioni

$$F(z,t) = \left\{ \log\left[\frac{k(z+ih)}{k(z-ih)}\right] - 2\ P.V.\int_0^\infty \frac{e^{-is(z-ih)}}{s-k}\,ds \right\} \operatorname{sen}(\omega t) + \left\{ 2\pi\, e^{-ik(z-ih)} \right\} \cos(\omega t)$$

$$G(z,t) = \left\{ i\log\left[k^2\left(z^2+h^2\right)\right] - 2i\ P.V.\int_0^\infty \frac{e^{-is(z-ih)}}{s-k}\,ds \right\} \operatorname{sen}(\omega t) - \left\{ 2\pi\, e^{-ik(z-ih)} \right\} \cos(\omega t)$$

Gli integrali impropi devono essere interpretati nel senso del valore principale di Cauchy. $\operatorname{Re}\{F(z,t)\}$, $\operatorname{Re}\{G(z,t)\}$ sono potenziali di velocita' che soddisfano tutte le equazioni del sistema [2.24] tranne le condizioni al contorno (Wehausen and Laitone 1960) e non sono definite nel punto $z = -ih$. Le funzioni precedenti nel dominio esterno alla singolarita' logaritmica $z = -ih$ e per $y < h$ sono funzioni analitiche della variabile complessa z e pertanto possono essere sviluppate in serie di Laurent (Gilardi 1991) ottenendo l'espansione in serie valida per $|z+ih| < 2h - a$:

$$F(z,t) = \left\{ \log[k(z+ih)] + \sum_{m=0}^{\infty} A_m [-ik(z+ih)]^m \right\} \operatorname{sen}(\omega t) + \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} B_m [-ik(z+ih)]^m \right\} \cos(\omega t)$$

$$G(z,t) = \left\{ i\log[k(z+ih)] - \sum_{m=0}^{\infty} iA_m [-ik(z+ih)]^m \right\} \operatorname{sen}(\omega t) - \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} B_m [-ik(z+ih)]^m \right\} \cos(\omega t)$$

con

$$A_m = \frac{1}{m(2kh)^m} + \frac{2}{m!}\left[e^{-2kh}\,\overline{E}i(2kh) - \int_0^\infty e^{-2kh\,u}\,\frac{1-u^m}{1-u}\,du \right] \qquad m \geq 1$$

[A.1] $$A_0 = -\log(-2ikh) + 2\,e^{-2kh}\,\overline{E}i(2kh)$$

$$B_m = \frac{2\pi e^{-2kh}}{m!}$$

e

[A.2] $$\begin{cases} \overline{E}i(x) = P.V.\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{e^u}{u} du \\ \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-xu} \frac{1-u^m}{1-u} du = \sum_{j=1}^{m} \frac{(j-1)!}{x^j} \qquad m \geq 1 \end{cases}$$

Se si deriva n volte rispetto a z le funzioni F , G la parte reale delle espressioni risultanti soddisfa ancora le equazioni [2.24] eccetto le condizioni al contorno. Inoltre se si cambia t in $t+2\pi/\omega$ si ottengono altre funzioni indipendenti. Tenendo conto che $z+ih = ire^{-i\theta}$ il set delle funzioni potenziali singolari di Ogilvie e'

$$f_{j1}(r,\theta,t;a,h) = \mathrm{Re}\left\{ \mathrm{sen}(\omega t)\left[\frac{e^{ij\theta}}{(kr)^j} - \sum_{n=j}^{\infty} A_n (kr)^{n-j} \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} e^{-i(n-j)\theta} \right] + \right.$$
$$\left. - \cos(\omega t)\left[\sum_{n=j}^{\infty} B_n (kr)^{n-j} \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} e^{-i(n-j)\theta} \right] \right\}$$

$$f_{j2}(r,\theta,t;a,h) = \mathrm{Re}\left\{ \cos(\omega t)\left[\frac{e^{ij\theta}}{(kr)^j} - \sum_{n=j}^{\infty} A_n (kr)^{n-j} \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} e^{-i(n-j)\theta} \right] + \right.$$
$$\left. + \mathrm{sen}(\omega t)\left[\sum_{n=j}^{\infty} B_n (kr)^{n-j} \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} e^{-i(n-j)\theta} \right] \right\}$$

$$g_{j1}(r,\theta,t;a,h) = \mathrm{Re}\left\{ \mathrm{sen}(\omega t)\left[\frac{ie^{ij\theta}}{(kr)^j} + i\sum_{n=j}^{\infty} A_n (kr)^{n-j} \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} e^{-i(n-j)\theta} \right] + \right.$$
$$\left. + \cos(\omega t)\left[i\sum_{n=j}^{\infty} B_n (kr)^{n-j} \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} e^{-i(n-j)\theta} \right] \right\}$$

$$g_{j2}(r,\theta,t;a,h) = \mathrm{Re}\left\{\cos(\omega t)\left[\frac{ie^{ij\theta}}{(kr)^j} + i\sum_{n=j}^{\infty} A_n (kr)^{n-j} \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} e^{-i(n-j)\theta}\right] + \right.$$
$$\left. -\,\mathrm{sen}(\omega t)\left[i\sum_{n=j}^{\infty} B_n (kr)^{n-j} \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} e^{-i(n-j)\theta}\right]\right\}$$

$\forall\ j \in N : j \geq 1.$

Posto

[A.3]
$$\tilde{A}_{m,n} = A_{m+n} \frac{(m+n)!}{m!(n-1)!}$$
$$\tilde{B}_{m,n} = B_{m+n} \frac{(m+n)!}{m!(n-1)!}$$

e $m = n - j$ e sviluppando ulteriormente si ottiene

$$f_{j1}(r,\theta,t;a,h) = \mathrm{sen}(\omega t)\left[\frac{\cos(j\theta)}{(kr)^j} - \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{A}_{m,j} (kr)^m \cos(m\theta)\right] - \cos(\omega t)\left[\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{B}_{m,j} (kr)^m \cos(m\theta)\right]$$

$$f_{j2}(r,\theta,t;a,h) = \cos(\omega t)\left[\frac{\cos(j\theta)}{(kr)^j} - \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{A}_{m,j} (kr)^m \cos(m\theta)\right] + \mathrm{sen}(\omega t)\left[\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{B}_{m,j} (kr)^m \cos(m\theta)\right]$$

$$g_{j1}(r,\theta,t;a,h) = \mathrm{sen}(\omega t)\left[-\frac{\mathrm{sen}(j\theta)}{(kr)^j} + \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{A}_{m,j} (kr)^m \mathrm{sen}(m\theta)\right] + \cos(\omega t)\left[\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{B}_{m,j} (kr)^m \mathrm{sen}(m\theta)\right]$$

$$g_{j2}(r,\theta,t;a,h) = \cos(\omega t)\left[-\frac{\mathrm{sen}(j\theta)}{(kr)^j} + \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{A}_{m,j} (kr)^m \mathrm{sen}(m\theta)\right] - \mathrm{sen}(\omega t)\left[\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{B}_{m,j} (kr)^m \mathrm{sen}(m\theta)\right]$$

$\forall\ j \in N : j \geq 1.$

Potenziali singolari di Ursell.

Ursell considera il potenziale complesso

$$E(z,t)=\left\{\log\left[\frac{k(z+ih)}{k(z-ih)}\right]-2\,P.V.\int_0^{\infty}\frac{e^{-s(z+ih)}}{s+ik}\,ds\right\}\mathrm{sen}(\omega t)+\left\{2\pi\, e^{-ik(z-ih)}\right\}\cos(\omega t)$$

La parte reale di $E(z,t)$ soddisfa tutte le equazioni del sistema [2.24] tranne le condizioni al contorno e presenta una singolarita' logaritmica per $z=-ih$. Nell'intorno del punto singolare la funzione $E(z,t)$ puo' essere sviluppata in serie di Laurent (Gilardi 1991) ottenendo

$$E(z,t)=\left\{\log[k(z+ih)]+\sum_{m=0}^{\infty}A_m[-ik(z+ih)]^m\right\}\mathrm{sen}(\omega t)+\left\{\sum_{m=0}^{\infty}B_m[-ik(z+ih)]^m\right\}\cos(\omega t)$$

con A_m , B_m definite dalle [A.1] e [A.2].

Derivando n volte rispetto a z e cambiando t *in* $t+2\pi/\omega$ si ottiene il set di potenziali singolari

$$\tilde{f}_{j1}(r,\theta,t;a,h)=\mathrm{Re}\left\{\mathrm{sen}(\omega t)\left[-\frac{e^{-ij\theta}}{(kr)^j}+\sum_{n=j}^{\infty}A_n(kr)^{n-j}\frac{n!}{(n-j)!(j-1)!}e^{i(n-j)\theta}\right]+\right.$$
$$\left.+\cos(\omega t)\left[\sum_{n=j}^{\infty}B_n(kr)^{n-j}\frac{n!}{(n-j)!(j-1)!}e^{i(n-j)\theta}\right]\right\}$$

$$\tilde{f}_{j2}(r,\theta,t;a,h)=\mathrm{Re}\left\{\cos(\omega t)\left[-\frac{e^{-ij\theta}}{(kr)^j}+\sum_{n=j}^{\infty}A_n(kr)^{n-j}\frac{n!}{(n-j)!(j-1)!}e^{i(n-j)\theta}\right]+\right.$$
$$\left.-\,\mathrm{sen}(\omega t)\left[\sum_{n=j}^{\infty}B_n(kr)^{n-j}\frac{n!}{(n-j)!(j-1)!}e^{i(n-j)\theta}\right]\right\}$$

$$\tilde{g}_{j1}(r,\theta,t;a,h) = \mathrm{Re}\left\{ \mathrm{sen}(\omega t)\left[-\frac{i e^{-ij\theta}}{(kr)^j} - i\sum_{n=j}^{\infty} A_n (kr)^{n-j} \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} e^{i(n-j)\theta} \right] + \right.$$
$$\left. - \cos(\omega t)\left[i\sum_{n=j}^{\infty} B_n (kr)^{n-j} \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} e^{i(n-j)\theta} \right] \right\}$$

$$\tilde{g}_{j2}(r,\theta,t;a,h) = \mathrm{Re}\left\{ \cos(\omega t)\left[-\frac{i e^{-ij\theta}}{(kr)^j} - i\sum_{n=j}^{\infty} A_n (kr)^{n-j} \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} e^{i(n-j)\theta} \right] + \right.$$
$$\left. + \mathrm{sen}(\omega t)\left[i\sum_{n=j}^{\infty} B_n (kr)^{n-j} \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} e^{i(n-j)\theta} \right] \right\}$$

$\forall\ j \in N : j \geq 1.$

Posto $m = n - j$ e sviluppando ulteriormente si ottengono le funzioni

$$\tilde{f}_{j1}(r,\theta,t;a,h) = \mathrm{sen}(\omega t)\left[-\frac{\cos(j\theta)}{(kr)^j} + \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{A}_{m,j} (kr)^m \cos(m\theta) \right] + \cos(\omega t)\left[\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{B}_{m,j} (kr)^m \cos(m\theta) \right]$$

$$\tilde{f}_{j2}(r,\theta,t;a,h) = \cos(\omega t)\left[-\frac{\cos(j\theta)}{(kr)^j} + \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{A}_{m,j} (kr)^m \cos(m\theta) \right] - \mathrm{sen}(\omega t)\left[\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{B}_{m,j} (kr)^m \cos(m\theta) \right]$$

$$\tilde{g}_{j1}(r,\theta,t;a,h) = \mathrm{sen}(\omega t)\left[-\frac{\mathrm{sen}(j\theta)}{(kr)^j} + \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{A}_{m,j} (kr)^m \mathrm{sen}(m\theta) \right] + \cos(\omega t)\left[\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{B}_{m,j} (kr)^m \mathrm{sen}(m\theta) \right]$$

$$\tilde{g}_{j2}(r,\theta,t;a,h) = \cos(\omega t)\left[-\frac{\mathrm{sen}(j\theta)}{(kr)^j} + \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{A}_{m,j} (kr)^m \mathrm{sen}(m\theta) \right] - \mathrm{sen}(\omega t)\left[\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{B}_{m,j} (kr)^m \mathrm{sen}(m\theta) \right]$$

$\forall\ j \in N : j \geq 1.$

Confrontando le funzioni di Ursell con quelle di Ogilvie risultano le seguenti relazioni

$$\begin{cases} \tilde{f}_{j1} = -f_{j1} \\ \tilde{f}_{j2} = -f_{j2} \\ \tilde{g}_{j1} = g_{j1} \\ \tilde{g}_{j2} = g_{j2} \end{cases} \qquad \forall\ j \in N :\ j \geq 1.$$