CAPITOLO III

SOLLECITAZIONI DI ONDE PERIODICHE SU UN CILINDRO ORIZZONTALE IMMERSO

3.1 ***LA FORZA SUL CILINDRO SOLIDO***

Consideriamo il campo di moto che si realizza quando un'onda periodica investe un cilindro orizzontale immerso. Al primo ordine di Stokes,il campo della fluttuazione di pressione risulta (v. par.2.3)

[3.1]
$$\Delta p(r,\theta,t) = \rho g \frac{H}{2} e^{-kh} \left\{ \tilde{F}\,\mathrm{sen}(\omega t) - \tilde{G}\cos(\omega t) \right\}$$

con

$$\begin{cases} \tilde{F}(r,\theta) = \dfrac{1}{1+S_\varepsilon^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \varepsilon_n \left(\dfrac{1}{(kr)^n} + \dfrac{(kr)^n}{(ka)^{2n}} \right) \left[\cos(n\theta) + S_\varepsilon\,\mathrm{sen}(n\theta) \right] \right\} - \dfrac{1}{1+S_\varepsilon^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n\varepsilon_n \left(A_n + B_n S_\varepsilon \right) \right\} + 1 \\ \tilde{G}(r,\theta) = \dfrac{1}{1+S_\varepsilon^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \varepsilon_n \left(\dfrac{1}{(kr)^n} + \dfrac{(kr)^n}{(ka)^{2n}} \right) \left[S_\varepsilon \cos(n\theta) - \mathrm{sen}(n\theta) \right] \right\} - \dfrac{1}{1+S_\varepsilon^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n\varepsilon_n \left(A_n S_\varepsilon - B_n \right) \right\} \end{cases}$$

dove a e' il raggio del cilindro e h l'affondamento del baricentro.

Consideriamo la circonferenza Γ che individua il cilindro orizzontale (v. fig. 3.1).Sul tratto infinitesimo $dl = a\,d\theta$ agisce la forza infinitesima $d\vec{F}$ le cui componenti scalari risultano:

[3.2]
$$\begin{cases} dF_X = -\Delta p\big|_{r=a}\,\mathrm{sen}(\theta)\,dl = -\Delta p\big|_{r=a}\,\mathrm{sen}(\theta)\;a\,d\theta \\ dF_Z = -\Delta p\big|_{r=a}\cos(\theta)\,dl = -\Delta p\big|_{r=a}\cos(\theta)\;a\,d\theta \end{cases}$$

La forza complessiva si ottiene sommando tutti i contributi $d\vec{F}$ relativi agli infiniti tratti infinitesimi in cui abbiamo diviso la circonferenza, ovvero

Fig. 3.1

$$
[3.3] \qquad \begin{cases} F_X = \int_\Gamma dF_X = -\int_0^{2\pi} \Delta p\big|_{r=a} \operatorname{sen}(\theta)\; a\, d\theta \\[2ex] F_Z = \int_\Gamma dF_Z = -\int_0^{2\pi} \Delta p\big|_{r=a} \cos(\theta)\; a\, d\theta \end{cases}
$$

e sostituendo l'espressione [3.1] la componente orizzontale risulta

$$
[3.4] \qquad \begin{aligned} F_X &= -\int_0^{2\pi} \left[\tilde{F}\big|_{r=a} \operatorname{sen}(\omega t) - \tilde{G}\big|_{r=a} \cos(\omega t) \right] \operatorname{sen}(\theta)\, a\, d\theta = \\ &- \operatorname{sen}(\omega t) \left[\int_0^{2\pi} \tilde{F}\big|_{r=a} \operatorname{sen}(\theta)\, a\, d\theta \right] + \cos(\omega t) \left[\int_0^{2\pi} \tilde{G}\big|_{r=a} \operatorname{sen}(\theta)\, a\, d\theta \right] \end{aligned}
$$

analogamente la componente verticale della forza F_Z risulta:

[3.5]
$$F_Z = -\int_0^{2\pi}\left[\tilde{F}\Big|_{r=a}\,\mathrm{sen}(\omega t) - \tilde{G}\Big|_{r=a}\cos(\omega t)\right]\cos(\theta)\,a\,d\theta =$$
$$-\,\mathrm{sen}(\omega t)\left[\int_0^{2\pi}\tilde{F}\Big|_{r=a}\cos(\theta)\,a\,d\theta\right] + \cos(\omega t)\left[\int_0^{2\pi}\tilde{G}\Big|_{r=a}\cos(\theta)\,a\,d\theta\right]$$

Gli integrali tra le parentesi quadre possono essere calcolati agevolmente: le funzioni $\tilde{F},\tilde{G}$ (v. formule [2.76]) sono date dalla somma di una serie di Fourier e di un termine costante. Quest'ultimo non contribuisce alla valutazione degli integrali e quindi non si considera ai fini del calcolo.Risulta quindi:

$$\int_0^{2\pi}\tilde{F}\Big|_{r=a}\mathrm{sen}(\theta)\,a\,d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{1+S_\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varepsilon_n\frac{2}{(ka)^n}\left[\cos(n\theta)+S_\varepsilon\,\mathrm{sen}(n\theta)\right]\right\}\mathrm{sen}(\theta)\,a\,d\theta =$$
$$=\frac{1}{1+S_\varepsilon^2}\int_0^{2\pi}\frac{2\varepsilon_1}{ka}\left[\cos(\theta)+S_\varepsilon\,\mathrm{sen}(\theta)\right]\mathrm{sen}(\theta)\,a\,d\theta = \frac{S_\varepsilon}{1+S_\varepsilon^2}\frac{2\pi\varepsilon_1}{k}$$

$$\int_0^{2\pi}\tilde{G}\Big|_{r=a}\mathrm{sen}(\theta)\,a\,d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{1+S_\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varepsilon_n\frac{2}{(ka)^n}\left[S_\varepsilon\cos(n\theta)-\mathrm{sen}(n\theta)\right]\right\}\mathrm{sen}(\theta)\,a\,d\theta =$$
$$=\frac{1}{1+S_\varepsilon^2}\int_0^{2\pi}\frac{2\varepsilon_1}{ka}\left[S_\varepsilon\cos(\theta)-\mathrm{sen}(\theta)\right]\mathrm{sen}(\theta)\,a\,d\theta = -\frac{1}{1+S_\varepsilon^2}\frac{2\pi\varepsilon_1}{k}$$

$$\int_0^{2\pi}\tilde{F}\Big|_{r=a}\cos(\theta)\,a\,d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{1+S_\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varepsilon_n\frac{2}{(ka)^n}\left[\cos(n\theta)+S_\varepsilon\,\mathrm{sen}(n\theta)\right]\right\}\cos(\theta)\,a\,d\theta$$
$$=\frac{1}{1+S_\varepsilon^2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+S_\varepsilon^2}\frac{2\varepsilon_1}{ka}\left[\cos(\theta)+S_\varepsilon\,\mathrm{sen}(\theta)\right]\cos(\theta)\,a\,d\theta = \frac{1}{1+S_\varepsilon^2}\frac{2\pi\varepsilon_1}{k}$$

$$\int_0^{2\pi}\tilde{G}\Big|_{r=a}\cos(\theta)\,a\,d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{1+S_\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varepsilon_n\frac{2}{(ka)^n}\left[S_\varepsilon\cos(n\theta)-\mathrm{sen}(n\theta)\right]\right\}\cos(\theta)\,a\,d\theta$$
$$=\frac{1}{1+S_\varepsilon^2}\int_0^{2\pi}\frac{2\varepsilon_1}{ka}\left[S_\varepsilon\cos(\theta)-\mathrm{sen}(\theta)\right]\cos(\theta)\,a\,d\theta = \frac{S_\varepsilon}{1+S_\varepsilon^2}\frac{2\pi\varepsilon_1}{k}$$

in cui l'unico termine della serie che contribuisce all'integrale è quello per $n=1$.

L'espressione della forza si semplifica nella [3.6]

$$\begin{cases} F_X = \rho g \dfrac{H}{2} e^{-kh} \dfrac{2\pi}{k} \dfrac{\varepsilon_1}{1+S_\varepsilon^2} \left[-S_\varepsilon \,\mathrm{sen}(\omega t) - \cos(\omega t)\right] = -\rho g \dfrac{H}{2} e^{-kh} \dfrac{2\pi}{k} \dfrac{\varepsilon_1}{\sqrt{1+S_\varepsilon^2}} \cos(\omega t - \Psi) \\ \\ F_Z = \rho g \dfrac{H}{2} e^{-kh} \dfrac{2\pi}{K} \dfrac{\varepsilon_1}{1+S_\varepsilon^2} \left[-\mathrm{sen}(\omega t) + S_\varepsilon \cos(\omega t)\right] = -\rho g \dfrac{H}{2} e^{-kh} \dfrac{2\pi}{k} \dfrac{\varepsilon_1}{\sqrt{1+S_\varepsilon^2}} \mathrm{sen}(\omega t - \Psi) \end{cases}$$

con

[3.7] $$\Psi = \mathrm{arctg}(S_\varepsilon) \quad e \quad S_\varepsilon = 2\pi e^{-2kh} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{(n-1)!}$$

L'ampiezza massima della forza, identica per entrambe le componenti scalari, risulta

[3.8] $$F_X\Big|_{MAX} = F_Z\Big|_{MAX} = \rho g \frac{H}{2} e^{-kh} \frac{2\pi}{k} \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{1+S_\varepsilon^2}}$$

3.2 *LA FORZA SUL CILINDRO D'ACQUA EQUIVALENTE: FORZA DI FROUDE-KRYLOV*

Consideriamo il campo di moto libero da ostacoli. Al primo ordine di Stokes il campo della fluttuazione di pressione dovuto all'onda incidente Δp_W risulta

[3.9] $$\begin{aligned} \Delta p_W(r,\theta,t) &= \rho g \frac{H}{2} e^{-kh} e^{kr\cos(\theta)} \,\mathrm{sen}[kr\,\mathrm{sen}(\theta) + \omega t] = \\ &= \rho g \frac{H}{2} e^{-kh}\, \mathrm{Im}\left\{e^{kre^{i\theta}} e^{i\omega t}\right\} \end{aligned}$$

dove $\mathrm{Im}(x)$ sta per parte immaginaria di x.

Consideriamo un volume d'acqua equivalente, avente lo stesso raggio e lo stesso affondamento del cilindro solido.La circonferenza Γ individua la traccia del volume equivalente (v. fig. 3.1).Sul tratto infinitesimo $dl = a\,d\theta$ agisce la forza infinitesima $d\vec{F}^{'}$ le cui componenti scalari valgono

[3.10]
$$\begin{cases} dF_X^{'} = -\Delta p_W\big|_{r=a}\,\mathrm{sen}(\theta)\,dl = -\Delta p_W\big|_{r=a}\,\mathrm{sen}(\theta)\;a\,d\theta \\ dF_Z^{'} = -\Delta p_W\big|_{r=a}\,\cos(\theta)\,dl = -\Delta p_W\big|_{r=a}\,\cos(\theta)\;a\,d\theta \end{cases}$$

La forza totale risulta avere componenti

[3.11]
$$\begin{cases} F_X^{'} = \int_\Gamma dF_X^{'} = -\int_0^{2\pi} \Delta p_W\big|_{r=a}\,\mathrm{sen}(\theta)\;a\,d\theta \\ F_Z^{'} = \int_\Gamma dF_Z^{'} = -\int_0^{2\pi} \Delta p_W\big|_{r=a}\,\cos(\theta)\;a\,d\theta \end{cases}$$

e sostituendo l'espressione [3.9] si ottiene

[3.12]
$$\begin{cases} F_X^{'} = -\mathrm{Im}\left\{e^{i\omega t}\int_0^{2\pi} e^{k\,r\,e^{i\theta}}\,\mathrm{sen}(\theta)\,a\,d\theta\right\} \\ F_Z^{'} = -\mathrm{Im}\left\{e^{i\omega t}\int_0^{2\pi} e^{k\,r\,e^{i\theta}}\,\cos(\theta)\,a\,d\theta\right\} \end{cases}$$

Per calcolare gli integrali sviluppiamo in serie di Fourier il termine $e^{k\,r\,e^{i\theta}}$, sfruttando lo sviluppo in serie di Taylor della funzione esponenziale e^x, ottenendo

[3.13]
$$e^{k\,r\,e^{i\theta}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(kre^{i\theta}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(kr)^n}{n!}e^{i\,n\theta}$$

L'uniforme convergenza della serie permette di invertire l'integrale con la sommatoria ottenendo le [3.14]

$$
\begin{cases}
F_X^{'} = -\mathrm{Im}\left\{ e^{i\omega t} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ka)^n}{n!} e^{in\theta} \operatorname{sen}(\theta)\, a \right] d\theta \right\} = \\
\quad = -\mathrm{Im}\left\{ e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{2\pi} \frac{(ka)^n}{n!} e^{in\theta} \operatorname{sen}(\theta)\, a\, d\theta \right] \right\} = -\mathrm{Im}\left\{ e^{i\omega t} i\, ka^2 \pi \right\} = -ka^2 \pi \cos(\omega t) \\
F_Z^{'} = -\mathrm{Im}\left\{ e^{i\omega t} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ka)^n}{n!} e^{in\theta} \cos(\theta)\, a \right] d\theta \right\} = \\
\quad = -\mathrm{Im}\left\{ e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{2\pi} \frac{(ka)^n}{n!} e^{in\theta} \cos(\theta)\, a\, d\theta \right] \right\} = -\mathrm{Im}\left\{ e^{i\omega t}\, ka^2 \pi \right\} = -ka^2 \pi \operatorname{sen}(\omega t)
\end{cases}
$$

Si osservi che l’unico termine della serie che fornisce un contributo non nullo si ha per $n = 1$. La forza di Froude Krylov vale

[3.15]
$$
\begin{cases}
F_X^{'} = -\rho g \dfrac{H}{2} e^{-kh} ka^2 \pi \cos(\omega t) \\
F_Z^{'} = -\rho g \dfrac{H}{2} e^{-kh} ka^2 \pi \operatorname{sen}(\omega t)
\end{cases}
$$

L’ampiezza massima delle componenti scalari della forza è identica e vale

[3.16]
$$
F_X^{'}\Big|_{MAX} = F_Z^{'}\Big|_{MAX} = \rho g \frac{H}{2} e^{-kh} ka^2 \pi
$$

Si osservi come la forza verticale sia in fase con l’elevazione d’onda in superficie in corrispondenza del centro della circonferenza. Infatti assume il valore massimo in modulo quando, per $x = 0$, si realizza una cresta o un cavo.Risulta nulla quando si realizza uno zero down-crossing oppure uno zero up-crossing.Infatti il centro del cilindro ha cordinate $x=0$, $z=-h$ e quindi $\eta_W(x,t)$ risulta

[3.17] $$\eta_W(x,t)\big|_{x=0} = \left[\frac{H}{2}\,\mathrm{sen}(kx+\omega t)\right]_{x=0} = \frac{H}{2}\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

La forza orizzontale risulta invece sfasata di un quarto di periodo rispetto all'elevazione in superficie. Assume valore nullo quando in superficie, per $x=0$, si realizza una cresta o un cavo.Raggiunge il suo valore massimo in modulo quando in superficie si realizza uno zero down-crossing oppure uno zero up-crossing.

3.3 *I COEFFICIENTI DI DIFFRAZIONE DELLA FORZA* $C_d(f)$

Il coefficiente di diffrazione delle onde C_d ,,consente di calcolare le alterazioni che subisce il campo di moto incidente in presenza del cilindro solido.Nel capitolo II si è ricavata l'espressione analitica del coefficiente C_d per il campo di pressione intorno al cilindro.Definiamo adesso il coefficiente di diffrazione della forza $C_d(f)$. Esso e' definito come il rapporto fra il massimo di forza sul cilindro solido e il massimo di forza agente sul cilindro d'acqua equivalente. Con riferimento alle componenti scalari lungo x e lungo z, si ricava:

[3.18] $$\begin{cases} C_d(f_X) = \dfrac{F_X\big|_{\max}}{F'_X\big|_{\max}} \\[2ex] C_d(f_Z) = \dfrac{F_Z\big|_{\max}}{F'_Z\big|_{\max}} \end{cases}$$

Sostituendo le espressioni dei valori max [3.8] e [3.16] si ottiene

[3.19] $$C_d\left(f_X\right) = C_d\left(f_Z\right) = \frac{2\varepsilon_1}{(ka)^2\sqrt{1+S_\varepsilon^2}}$$

Pertanto il coefficiente di diffrazione $C_d\left(f_X\right)$ della componente orizzontale della forza sul cilindro risulta uguale al coefficiente di diffrazione $C_d\left(f_Z\right)$ della componente verticale della forza sul cilindro.

Si osservi che al limite per $a / L \rightarrow 0$, h *fissato* poiche' risulta (v. par. 2.3)

[3.20] $$\varepsilon_1 \cong (ka)^2 \qquad S_\varepsilon \cong 0$$

il coefficiente di diffrazione della forza risulta $C_d \cong 2$.

In generale per cilindri di piccole dimensioni l'ampiezza della forza è circa due volte l'ampiezza della forza di Froude-Krylov.